

目录

封 面.....	3
扉 页.....	4
版权页.....	5
编写人员.....	6
本册导引.....	7
目 录.....	9
第十一章 全等三角形.....	11
11.1 全等三角形.....	12
11.2 三角形全等的判定.....	16
阅读与思考 全等与全等三角形.....	28
11.3 角的平分线的性质.....	29
数学活动.....	34
小 结.....	35
复习题 11.....	36
第十二章 轴对称.....	38
12.1 轴对称.....	39
12.2 作轴对称图形.....	49
信息技术应用 探索轴对称的性质.....	57
12.3 等腰三角形.....	59
实验与探究 三角形中边与角之间的不等关系.....	68
数学活动.....	70
小 结.....	72
复习题 12.....	73
第十三章 实数.....	77
13.1 平方根.....	78
13.2 立方根.....	87
13.3 实 数.....	92
阅读与思考 为什么说 $\sqrt{2}$ 不是有理数.....	98
数学活动.....	99
小 结.....	100
复习题 13.....	101
第十四章 一次函数.....	103
14.1 变量与函数.....	104
信息技术应用 用计算机画函数图像.....	118
14.2 一次函数.....	120
阅读与思考 科学家如何测算地球的年龄.....	131
14.3 用函数观点看方程（组）与不等式.....	133
14.4 课题学习 选择方案.....	141
数学活动.....	145
小 结.....	146

复习题 14.....	147
第十五章 整式的乘除与因式分解.....	150
15.1 整式的乘法.....	151
15.2 乘法公式.....	161
阅读与思考 杨辉三角.....	167
15.3 整式的除法.....	169
15.4 因式分解.....	175
观察与猜想 $x^2+(p+q)x+pq$ 型式子的因式分解	182
数学活动.....	183
小 结.....	184
复习题 15.....	185
部分中英文词汇索引.....	187
封 底.....	188

封 面

经全国中小学教材审定委员会
2003 年初审通过

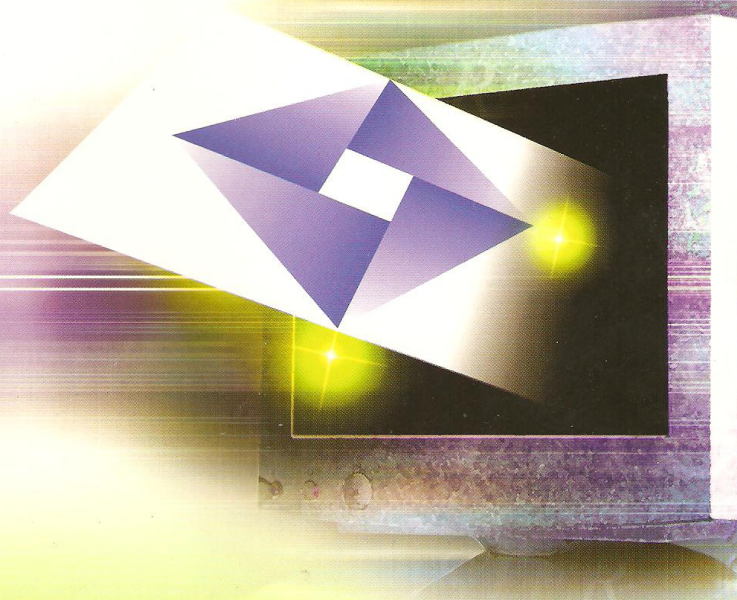
义务教育课程标准实验教科书

数 学

SHUXUE

八年级 上册

课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

扉 页

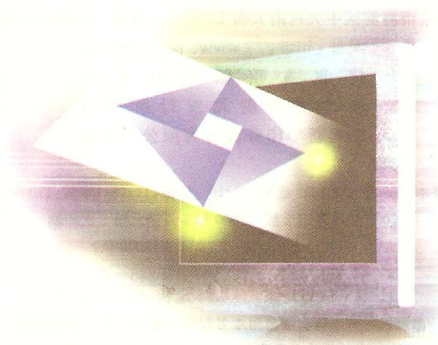
义务教育课程标准实验教科书

数 学

SHUXUE

八年级 上册

课 程 教 材 研 究 所 编 著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

版权页

义务教育课程标准实验教科书

数 学

八年级 上册

课 程 教 材 研 究 所 编 著
中学数学课程教材研究开发中心

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版
(北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编:100081)

网址: <http://www.pep.com.cn>

湖 北 省 出 版 总 社 重 印

新 华 书 店 湖 北 发 行 所 发 行

湖北新华印务股份有限公司印装

*

开本:787毫米×1092毫米 1/16 印张:11.75 字数:170 000

2008年3月第2版 2009年6月湖北第5次印刷

印数:1 147 001—1 787 300(2009秋)

ISBN 978-7-107-18245-7

G·11334(课) 压膜本定价:10.90元

著作权所有·请勿擅自用本书制作各类出版物·违者必究
如缺书请与当地新华书店联系,湖北省新华书店教材发行中心
服务监督电话:(027)83526231
如发现印装质量问题,影响阅读,请与当地新华书店联系调换。
湖北省出版总社教材出版中心质量投诉电话:(027)87679831
发现盗版 举报有奖 举报电话:(027)87679832
零售服务部:武昌湖北出版文化城三楼崇文书城
咨询电话:(027)87679000
地址:武汉市雄楚大街268号 邮编:430070

编写人员

主 编：林 群
副 主 编：田载今 薛 彬

本册主编：薛 彬
主要编者：王忠钦 田载今 左怀玲 田琪琨
薛 彬 吴江媛 李海东 郑 廉
本次修订：宋莉莉 李海东 李龙才 田载今 俞求是
责任编辑：张唯一
美术编辑：王俊宏 刘 昀
封面设计：林荣桓

本册导引

本册导引

亲爱的同学，祝贺你升入八年级。

你将要学习的这册书是我们根据《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》编写的实验教科书，这是你在七~九年级要学习的六册数学教科书中的第三册。

与前几册一样，你将继续乘坐“思考”“探究”“归纳”之舟，从身边的实际问题出发，在数学的海洋里乘风破浪，去探索、发现数学的奥秘；你还要用学到的本领去解决“复习巩固”“综合运用”“拓广探索”等三个层次的问题；你可以有选择地进行“数学活动”；如果有兴趣，你也可以到“阅读与思考”“观察与猜想”“实验与探究”“信息技术应用”这些选学内容中去看看更广阔的数学世界。通过探索、尝试，相信你的聪明才智会得到充分的发挥，你用数学解决问题的能力会迈上一个新的台阶。

现在，让我们启航，一起去遨游八年级上册这片数学新海域吧！

“**全等三角形**”将带你认识形状、大小相同的图形，探索两个三角形形状、大小相同的条件，了解角的平分线的性质。学了这些内容，你会对图形有进一步的认识，并初步体验怎样证明简单的数学结论。

在我们周围的世界，你会看到许多对称的现象。怎样认识轴对称与轴对称图形呢？学了“**轴对称**”一章，你就会获得答案。

面积为 2 的正方形的边长是多少？体积为 3 的正方体的棱长

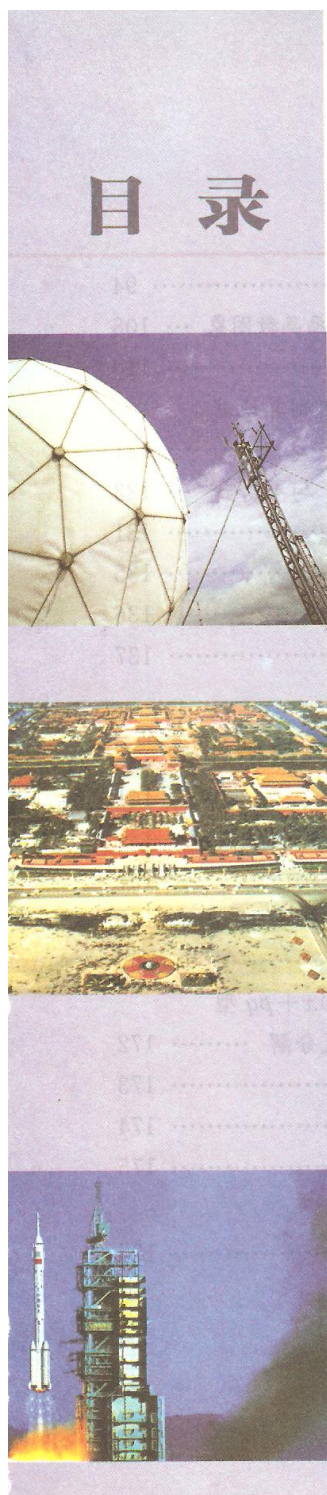
是多少？解决这些问题，会遇到一个新朋友——无理数。无理数经历了一个漫长而又艰苦的过程才来到数学这个大家庭，它的到来使数扩展到新的领域，“**实数**”会使我们对数的认识大开眼界。

我们生活在变化的世界中，时间推移、人口增长、水位升降……变化的例子举不胜举。函数将给你提供描述这些变化的一种数学工具。通过分析实际问题中的变量关系，你就得到了相应的函数，并能利用它解决非常广泛的问题。学了“**一次函数**”一章，你会对这些有所体会。

我们知道，可以用字母表示数，用含有字母的式子表示实际问题中的数量关系。在“**整式的乘除与因式分解**”中，通过对整式的进一步讨论，将使我们能够解决更多与数量关系有关的问题，加深对“从数到式”这个由具体到抽象的过程的认识。

数学伴随着我们成长、数学伴随着我们进步、数学伴随着我们成功，让我们一起随着这册书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！

目 录



目 录

第十一章 全等三角形

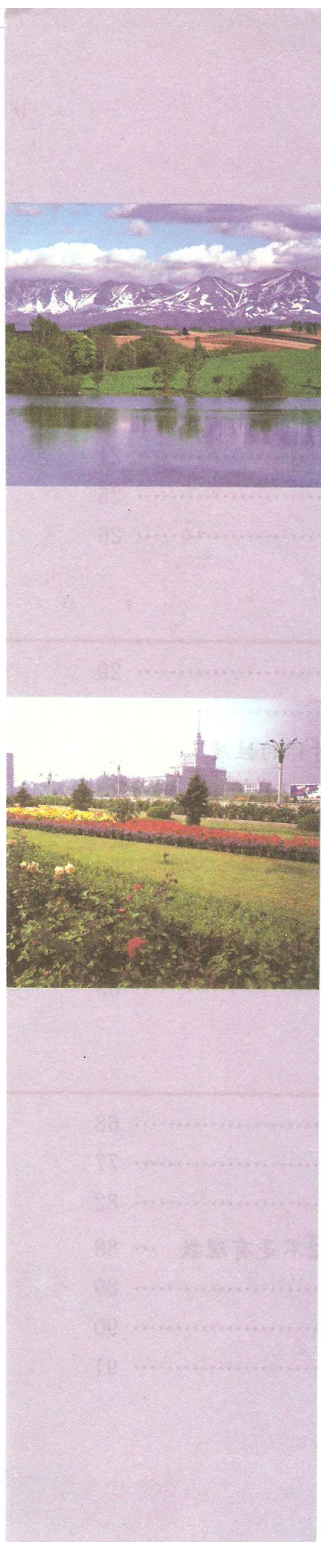
■ 11.1 全等三角形	2
■ 11.2 三角形全等的判定	6
阅读与思考 全等与全等三角形	18
■ 11.3 角的平分线的性质	19
数学活动	24
小结	25
复习题 11	26

第十二章 轴对称

■ 12.1 轴对称	29
■ 12.2 作轴对称图形	39
信息技术应用 探索轴对称的性质	47
■ 12.3 等腰三角形	49
实验与探究 三角形中边与角之间的 不等关系	58
数学活动	60
小结	62
复习题 12	63

第十三章 实 数

■ 13.1 平方根	68
■ 13.2 立方根	77
■ 13.3 实 数	82
阅读与思考 为什么说 $\sqrt{2}$ 不是有理数 ...	88
数学活动	89
小结	90
复习题 13	91



第十四章 一次函数

- 14.1 变量与函数 94
信息技术应用 用计算机画函数图象 ... 108
- 14.2 一次函数 110
阅读与思考 科学家如何测算地球的年龄 121
- 14.3 用函数观点看方程(组)与不等式 ... 123
- 14.4 课题学习 选择方案 131
数学活动 135
小结 136
复习题 14 137

第十五章 整式的乘除与因式分解

- 15.1 整式的乘法 141
- 15.2 乘法公式 151
阅读与思考 杨辉三角 157
- 15.3 整式的除法 159
- 15.4 因式分解 165
观察与猜想 $x^2+(p+q)x+pq$ 型
式子的因式分解 172
数学活动 173
小结 174
复习题 15 175

部分中英文词汇索引 177

第十一章 全等三角形



第十一章

全等三角形

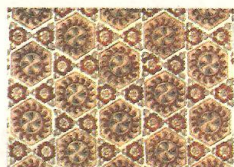
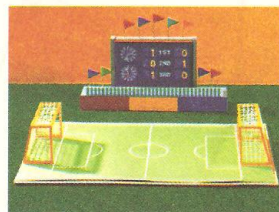
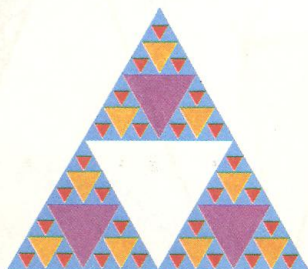
在我们的周围，经常可以看到形状、大小完全相同的图形。这类图形在几何学中具有特殊的意义，也是我们学习的一个重点内容。两个形状、大小完全相同的图形有什么性质？怎样判定两个图形是否形状、大小完全相同呢？本章将以最简单的多边形——三角形为例研究这些问题。

在第七章我们已经用推理论证得到了三角形中的一些结论。在本章中，推理论证将发挥更大的作用，如判定两个三角形形状、大小完全相同，证明分别属于两个三角形的线段或角相等，证明角的平分线的性质等。通过本章的学习，你的知识会进一步丰富，推理论证能力会进一步提高。

11.1 全等三角形

11.1 全等三角形

下面的例子里都有形状、大小相同的图形。



你能再举出一些例子吗？



把一块三角板按在纸板上，画下图形，照图形裁下来的纸板和三角板形状、大小完全一样吗？把三角板和裁得的纸板放在一起能够完全重合吗？从同一张底片冲洗出来的两张尺寸相同的照片上的图形，放在一起也能够完全重合吗？

可以看到，形状、大小相同的图形放在一起能够完全重合。能够完全重合的两个图形叫做**全等形** (congruent figures)。

能够完全重合的两个三角形叫做**全等三角形** (congruent triangles)。

思考

在图 11.1-1 中, 把 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 平移, 得到 $\triangle DEF$.

在图 11.1-2 中, 把 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 翻折 180° , 得到 $\triangle DBC$.

在图 11.1-3 中, 把 $\triangle ABC$ 旋转 180° , 得到 $\triangle AED$.

各图中的两个三角形全等吗?

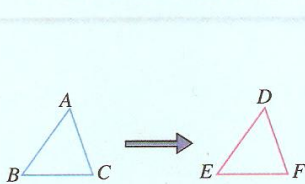


图 11.1-1

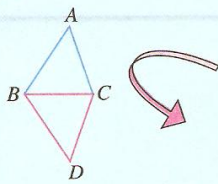


图 11.1-2

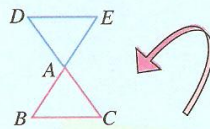


图 11.1-3

一个图形经过平移、翻折、旋转后, 位置变化了, 但形状、大小都没有改变, 即平移、翻折、旋转前后的图形全等.

把两个全等的三角形重合到一起, 重合的顶点叫做**对应顶点**, 重合的边叫做**对应边**, 重合的角叫做**对应角**. 例如, 图 11.1-1 中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等, 记作 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 其中点 A 和点 D , 点 B 和点 E , 点 C 和点 F 是对应顶点; AB 和 DE , BC 和 EF , AC 和 DF 是对应边; $\angle A$ 和 $\angle D$, $\angle B$ 和 $\angle E$, $\angle C$ 和 $\angle F$ 是对应角.

“全等”用“ \cong ”表示, 读作“全等于”.

记两个三角形全等时, 通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上. 例如, 图 11.1-2 中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 全等, 点 A 和点 D , 点 B 和点 B , 点 C 和点 C 是对应顶点, 记作 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$.

思考

图 11.1-1 中, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 对应边有什么关系? 对应角呢?

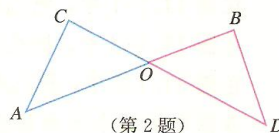
全等三角形有这样的性质:

全等三角形的对应边相等;

全等三角形的对应角相等.

练习

1. 在图 11.1-2, 图 11.1-3 中, 说出其中两个全等三角形的对应边, 对应角.
2. 如图, $\triangle OCA \cong \triangle OBD$, C 和 B , A 和 D 是对应顶点. 说出这两个三角形中相等的边和角.

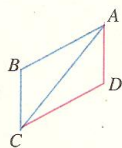


(第 2 题)

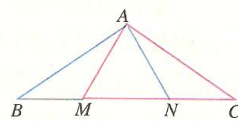
习题 11.1

复习巩固

1. 如图, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, AB 和 CD , BC 和 DA 是对应边. 写出其他对应边及对应角.



(第 1 题)

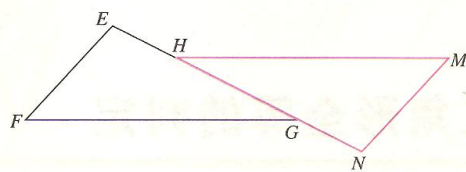


(第 2 题)

2. 如图, $\triangle ABN \cong \triangle ACM$, $\angle B$ 和 $\angle C$ 是对应角, AB 与 AC 是对应边. 写出其他对应边及对应角.

综合运用

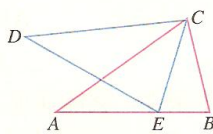
3. 如下页图, $\triangle EFG \cong \triangle NMH$, $\angle F$ 和 $\angle M$ 是对应角. 在 $\triangle EFG$ 中, FG 是最长边. 在 $\triangle NMH$ 中, MH 是最长边. $EF = 2.1$ cm, $EH = 1.1$ cm, $HN = 3.3$ cm.
 - (1) 写出其他对应边及对应角.
 - (2) 求线段 NM 及线段 HG 的长度.



(第 3 题)

拓展探索

4. 如图, $\triangle ABC \cong \triangle DEC$, CA 和 CD , CB 和 CE 是对应边.
 $\angle ACD$ 和 $\angle BCE$ 相等吗? 为什么?



(第 4 题)

11.2 三角形全等的判定

11.2 三角形全等的判定

我们知道, 如果 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, 那么它们的对应边相等, 对应角相等. 反过来, 如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 满足三条边对应相等, 三个角对应相等, 即

$$\begin{aligned} AB &= A'B', BC = B'C', CA = C'A', \\ \angle A &= \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C' \end{aligned}$$

这六个条件, 就能保证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (图 11.2-1). 如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 满足上述六个条件中的一部分, 那么能否保证 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等呢?

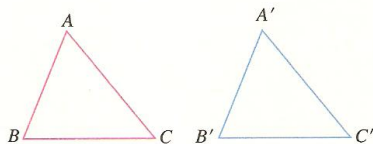


图 11.2-1

本节我们就来讨论这个问题.

探究1

先任意画出一个 $\triangle ABC$. 再画一个 $\triangle A'B'C'$, 使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 满足上述六个条件中的一个或两个. 你画出的 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 一定全等吗?

通过画图可以发现, 满足上述六个条件中的一个或两个, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不一定全等. 满足上述六个条件中的三个, 能保证 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等吗? 我们分情况进行讨论.

探究2

先任意画出一个 $\triangle ABC$. 再画一个 $\triangle A'B'C'$, 使 $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$. 把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下, 放到 $\triangle ABC$ 上, 它们全等吗?

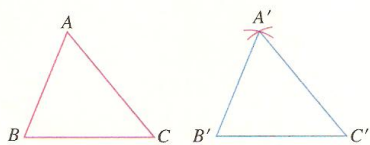


图 11.2-2

画一个 $\triangle A'B'C'$ ，使 $A'B' = AB$ ， $A'C' = AC$ ， $B'C' = BC$ ；

1. 画线段 $B'C' = BC$ ；
2. 分别以 B' ， C' 为圆心，线段 AB ， AC 为半径画弧，两弧交于点 A' ；
3. 连接线段 $A'B'$ ， $A'C'$ 。

图 11.2-2 给出了画 $\triangle A'B'C'$ 的方法，你是这样画的吗？探究 2 的结果反映了什么规律？

由探究 2 可以得到判定两个三角形全等的一个方法：

三边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）。

我们曾经做过这样的实验：将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架的形状、大小就不变了。就是说，三角形的三边确定了，这个三角形的形状、大小也就确定了。这里就用到上面的结论。

用上面的结论可以判断两个三角形全等。判断两个三角形全等的推理过程，叫做证明三角形全等。

例 1 如图 11.2-3， $\triangle ABC$ 是一个钢架， $AB = AC$ ， AD 是连接点 A 与 BC 中点 D 的支架。求证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 。

分析：要证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ，可看这两个三角形的三条边是否对应相等。

证明： $\because D$ 是 BC 的中点，

$\therefore BD = CD$ 。

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC, \\ BD = CD, \\ AD = AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ (SSS)。

由前面的结论还可以得到作一个角等于已知角的方法。

已知： $\angle AOB$ 。

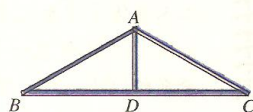


图 11.2-3

符号“ \therefore ”
表示“因为”，
“ \therefore ”表示“所以”。

AD 既是
 $\triangle ABD$ 的边又是
 $\triangle ACD$ 的边。
我们称它为这
两个三角形的
公共边。

求作： $\angle A'O'B'$ ，使 $\angle A'O'B' = \angle AOB$ 。

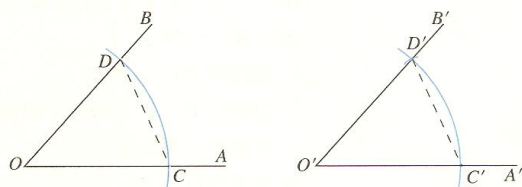


图 11.2-4

作法：1. 以点 O 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 OA ， OB 于点 C ， D ；

2. 画一条射线 $O'A'$ ，以点 O' 为圆心， OC 长为半径画弧，交 $O'A'$ 于点 C' ；

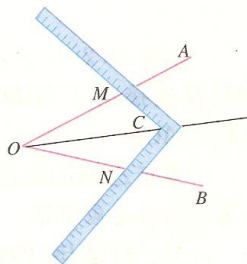
3. 以点 C' 为圆心， CD 长为半径画弧，与第 2 步中所画的弧交于点 D' ；

4. 过点 D' 画射线 $O'B'$ ，则 $\angle A'O'B' = \angle AOB$ 。

像这样只用无刻度的直尺和圆规作图的方法称为尺规作图。想一想，为什么这样作出的 $\angle A'O'B'$ 和 $\angle AOB$ 是相等的？

练习

工人师傅常用角尺平分一个任意角。做法如下：如图， $\angle AOB$ 是一个任意角，在边 OA ， OB 上分别取 $OM=ON$ ，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与 M ， N 重合。过角尺顶点 C 的射线 OC 便是 $\angle AOB$ 的平分线。为什么？



探究3

先任意画出一个 $\triangle ABC$ 。再画出一个 $\triangle A'B'C'$ ，使 $A'B'=AB$ ， $A'C'=AC$ ， $\angle A'=\angle A$ （即使两边和它们的夹角对应相等）。把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下，放到 $\triangle ABC$ 上，它们全等吗？

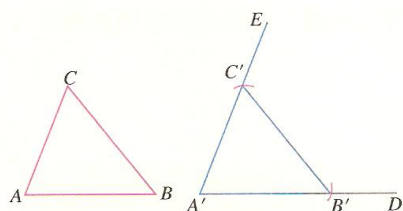


图 11.2-5

画一个 $\triangle A'B'C'$ ，使 $A'B'=AB$ ， $A'C'=AC$ ， $\angle A'=\angle A$ ：

1. 画 $\angle DA'E=\angle A$ ；
2. 在射线 $A'D$ 上截取 $A'B'=AB$ ，在射线 $A'E$ 上截取 $A'C'=AC$ ；
3. 连接 $B'C'$ 。

图 11.2-5 给出了画 $\triangle A'B'C'$ 的方法。你是这样画的吗？探究 3 的结果反映了什么规律？

由探究 3 也可以得到判定两个三角形全等的一个方法：

两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可以简写成“边角边”或“SAS”）。

例 2 如图 11.2-6，有一池塘，要测池塘两端 A ， B 的距离，可先在地面上取一个可以直接到达 A 和 B 的点 C ，连接 AC 并延长到 D ，使 $CD=CA$ 。连接 BC 并延长到 E ，使 $CE=CB$ 。连接 DE ，那么量出 DE 的长就是 A ， B 的距离。为什么？

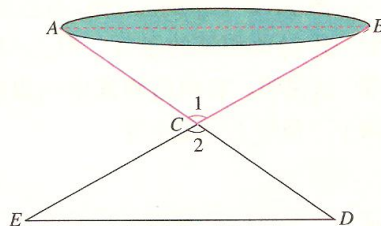


图 11.2-6

分析：如果能证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ ，就可以得出 $AB=DE$ 。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中， $CA=CD$ ， $CB=CE$ 。如果能得出 $\angle 1=\angle 2$ ， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 就全等了。

证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases} CA=CD, \\ \angle 1=\angle 2, \\ CB=CE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC$ (SAS).

$\therefore AB=DE$.

想一想， $\angle 1=\angle 2$ 的根据是什么？ $AB=DE$ 的根据是什么？

从例 2 可以看出：因为全等三角形的对应边相等，对应角相等，所以，证

明分别属于两个三角形的线段相等或者角相等的问题，常常通过证明这两个三角形全等来解决.



我们知道，两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等. 由“两边及其中一边的对角对应相等”的条件能判定两个三角形全等吗？为什么？

我们可以通过画图回答，还可以通过实验回答.

把一长一短两根细木棍的一端用螺钉铰合在一起，使长木棍的另一端与射线 BC 的端点 B 重合. 适当调整好长木棍与射线 BC 所成的角后，固定住长木棍，把短木棍摆起来 (图 11.2-7).

图 11.2-7 中的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 满足两边及其中一边对角相等的条件，但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 不全等. 这说明，有两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等.

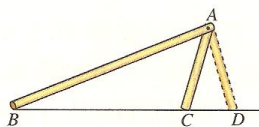
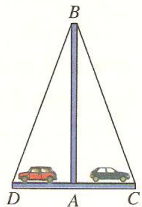


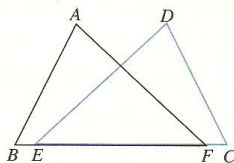
图 11.2-7

练习

- 如图，两车从南北方向的路段 AB 的一端 A 出发，分别向东，向西行进相同的距离，到达 C, D 两地. 此时 C, D 到 B 的距离相等吗？为什么？



(第1题)



(第2题)

- 如图，点 E, F 在 BC 上， $BE = CF$ ， $AB = DC$ ， $\angle B = \angle C$. 求证 $\angle A = \angle D$.

探究5

先任意画出一个 $\triangle ABC$. 再画一个 $\triangle A'B'C'$, 使 $A'B' = AB$, $\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$ (即使两角和它们的夹边对应相等). 把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下, 放到 $\triangle ABC$ 上, 它们全等吗?

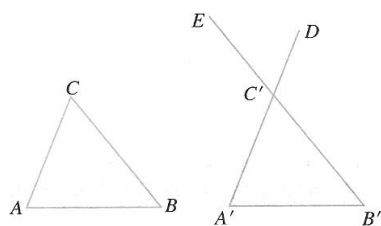


图 11.2-8

画一个 $\triangle A'B'C'$, 使 $A'B' = AB$, $\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$:

1. 画 $A'B' = AB$;
2. 在 $A'B'$ 的同旁画 $\angle DA'B' = \angle A$, $\angle EB'A' = \angle B$, $A'D$, $B'E$ 交于点 C' .

图 11.2-8 给出了画 $\triangle A'B'C'$ 的方法. 你是这样画的吗? 探究 5 的结果反映了什么规律?

由探究 5 也可以得到判定两个三角形全等的一个方法:

两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等 (可以简写成“角边角”或“ASA”).

探究6

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $BC = EF$ (图 11.2-9), $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 全等吗? 能利用角边角证明你的结论吗?

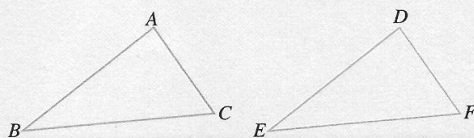


图 11.2-9

根据已知条件, 如果能证明 $\angle C = \angle F$, 就可以利用“角边角”证明 $\triangle ABC$

与 $\triangle DEF$ 全等. 由“三角形三个内角的和等于 180° ”可以证明 $\angle C = \angle F$.

证明: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B.$$

同理 $\angle F = 180^\circ - \angle D - \angle E$.

又 $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$,

$$\therefore \angle C = \angle F.$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle E, \\ BC = EF, \\ \angle C = \angle F, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (\text{ASA}).$$

因此, 我们可以得到下面的结论:

两个角和其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等 (可以简写成“角角边”或“AAS”).

例 3 如图 11.2-10, D 在 AB 上, E 在 AC 上, $AB = AC$, $\angle B = \angle C$. 求证 $AD = AE$.

分析: 如果能证明 $\triangle ACD \cong \triangle ABE$, 就可以得出 $AD = AE$.

证明: 在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABE$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle A \text{ (公共角)}, \\ AC = AB, \\ \angle C = \angle B, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE (\text{ASA}).$$

$$\therefore AD = AE.$$

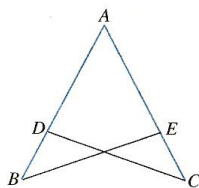


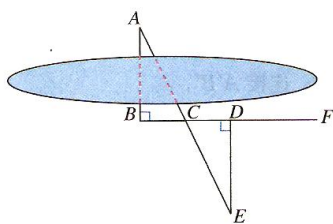
图 11.2-10



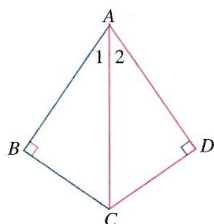
三角对应相等的两个三角形全等吗? 解答上述问题后把三角形全等的判定方法做一个小结.

练习

1. 如图，要测量池塘两岸相对的两点 A, B 的距离，可以在 AB 的垂线 BF 上取两点 C, D ，使 $BC=CD$ ，再画出 BF 的垂线 DE ，使 E 与 A, C 在一条直线上，这时测得 DE 的长就是 AB 的长。为什么？



(第1题)



(第2题)

2. 如图， $AB \perp BC$ ， $AD \perp DC$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。求证 $AB = AD$ 。

思考

对于两个直角三角形，除了直角相等的条件，还要满足几个条件，这两个直角三角形就全等了？

由三角形全等的条件可知，对于两个直角三角形，满足一边一锐角对应相等，或两直角边对应相等，这两个直角三角形就全等了。如果满足斜边和一条直角边对应相等，这两个直角三角形全等吗？

探究8

任意画出一个 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，使 $\angle C = 90^\circ$ 。再画一个 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ ，使 $\angle C' = 90^\circ$ ， $B'C' = BC$ ， $A'B' = AB$ 。把画好的 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ 剪下，放到 $\text{Rt}\triangle ABC$ 上，它们全等吗？

直角
三角形用
 $\text{Rt}\triangle$ 表示。

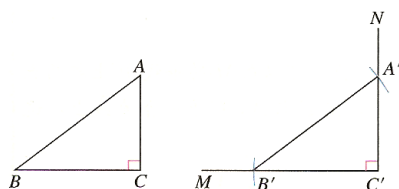


图 11.2-11

画一个 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$, 使 $B'C' = BC$, $A'B' = AB$:

1. 画 $\angle MC'N = 90^\circ$.
2. 在射线 $C'M$ 上取 $B'C' = BC$.
3. 以 B' 为圆心, AB 为半径画弧, 交射线 $C'N$ 于点 A' .
4. 连接 $A'B'$.

图 11.2-11 给出了画 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ 的方法. 你是这样画的吗? 探究 8 的结果反映了什么规律?

由探究 8 可以得到判定两个直角三角形全等的一个方法:

斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等 (可以简写成“斜边、直角边”或“HL”).

例 4 如图 11.2-12, $AC \perp BC$, $BD \perp AD$, $AC = BD$. 求证 $BC = AD$.

证明: $\because AC \perp BC$, $BD \perp AD$,

$\therefore \angle C$ 与 $\angle D$ 都是直角.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中,

$$\begin{cases} AB = BA, \\ AC = BD, \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle BAD$ (HL).

$\therefore BC = AD$.

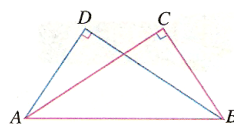
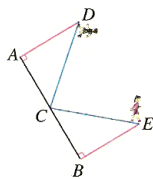


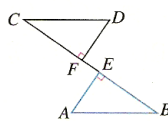
图 11.2-12

练习

1. 如图, C 是路段 AB 的中点, 两人从 C 同时出发, 以相同的速度分别沿两条直线行走, 并同时到达 D, E 两地. $DA \perp AB$, $EB \perp AB$. D, E 与路段 AB 的距离相等吗? 为什么?



(第 1 题)



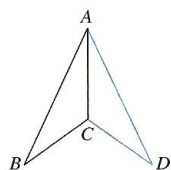
(第 2 题)

2. 如图, $AB = CD$, $AE \perp BC$, $DF \perp BC$, $CE = BF$. 求证 $AE = DF$.

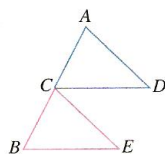
习题11.2

复习巩固

1. 如图, $AB=AD$, $CB=CD$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 全等吗? 为什么?



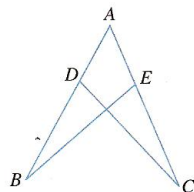
(第1题)



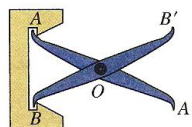
(第2题)

2. 如图, C 是 AB 的中点, $AD=CE$, $CD=BE$. 求证 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$.

3. 如图, $AB=AC$, $AD=AE$. 求证 $\angle B = \angle C$.



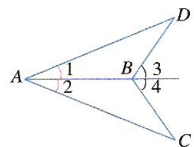
(第3题)



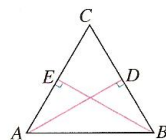
(第4题)

4. 如图, 把两根钢条的中点连在一起, 可以做成一个测量工件内槽宽的工具 (卡钳). 在图中, 要测量工件内槽宽, 只要测量什么? 为什么?

5. 如图, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. 求证 $AC = AD$.



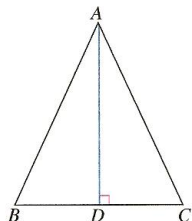
(第5题)



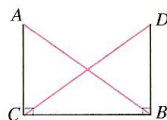
(第6题)

6. 如图, 从 C 地看 A, B 两地的视角 $\angle C$ 是锐角, 从 C 地到 A, B 两地的距离相等. A 到路段 BC 的距离 AD 与 B 到路段 AC 的距离 BE 相等吗? 为什么?

7. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD 是高. 求证: (1) $BD=CD$; (2) $\angle BAD=\angle CAD$.



(第7题)

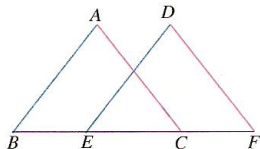


(第8题)

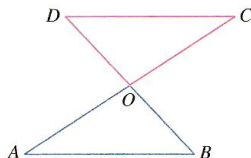
8. 如图, $AC \perp CB$, $DB \perp CB$, $AB=DC$. 求证 $\angle ABD=\angle ACD$.

综合运用

9. 如图, 点 B, E, C, F 在一条直线上, $AB=DE$, $AC=DF$, $BE=CF$. 求证 $\angle A=\angle D$.



(第9题)

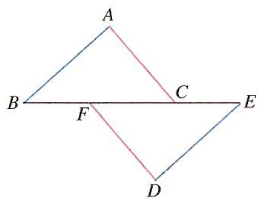


(第10题)

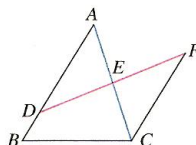
10. 如图, AC 和 BD 相交于点 O , $OA=OC$, $OB=OD$. 求证 $DC \parallel AB$.

拓广探索

11. 如图, 点 B, F, C, E 在一条直线上, $FB=CE$, $AB \parallel ED$, $AC \parallel FD$. 求证 $AB=DE$, $AC=DF$.

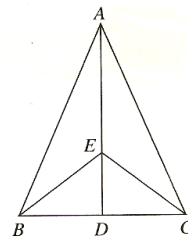


(第11题)



(第12题)

12. 如上页图, D 是 AB 上一点, DF 交 AC 于点 E , $DE = FE$, $FC \parallel AB$. AE 与 CE 有什么关系? 证明你的结论.
13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 是 BC 的中点, 点 E 在 AD 上. 找出图中的全等三角形, 并说明它们为什么全等.



(第 13 题)

阅读与思考 全等与全等三角形



阅读与思考

选学

全等与全等三角形



小明：全等是“一模一样”“完全相等”的意思吗？

老师：不考虑图形的位置时，可以这么理解。在几何学中，我们从形状、大小的角度描述全等的图形，即把形状和大小完全相同的图形叫做全等形。全等形还有其他的定义方式，如教科书是利用“能够完全重合”定义全等形的。

小明：全等是几何学中的重要概念吗？

老师：是的。几何学是研究图形的形状、大小和位置关系的学科，全等涉及其中的两个方面。在今后的学习中，你会发现几何中许多问题都源自全等问题，许多重要概念都是在全等概念的基础上产生的。

小明：为什么我们重点学习全等三角形呢？

老师：我们已经知道三角形是最简单的多边形，而且任意多边形都可以分解为若干个三角形。所以我们以全等三角形作为载体学习全等的知识，由此还可以方便地推广到其他多边形的全等问题。小明，你能说说我们是从哪两个方面研究全等三角形的吗？

小明：全等三角形的性质和三角形全等的判定。

老师：对，这也是研究一般的全等形的两个方面。利用全等三角形的性质，可以证明线段相等或角相等；利用三角形全等的判定方法，可以证明两个三角形是全等三角形。在实际应用中，我们常把它们结合起来使用，如先证明两个三角形全等，再进一步得出它们的对应边或对应角相等。



11.3 角的平分线的性质

11.3 角的平分线的性质



图 11.3-1 是一个平分角的仪器，其中 $AB=AD$, $BC=DC$. 将点 A 放在角的顶点， AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE , AE 就是 $\angle DAB$ 的平分线. 你能说明它的道理吗？

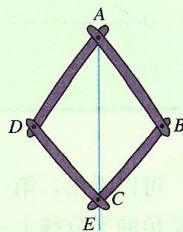


图 11.3-1

由上面的探究可以得出作已知角的平分线的方法.

已知: $\angle AOB$.

求作: $\angle AOB$ 的平分线.

作法: (1) 以 O 为圆心, 适当长为半径画弧, 交 OA 于 M , 交 OB 于 N .

(2) 分别以 M, N 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧, 两弧在 $\angle AOB$ 的内部交于点 C .

(3) 画射线 OC . 射线 OC 即为所求 (图 11.3-2).

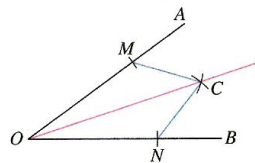


图 11.3-2

练习

平分平角 $\angle AOB$. 通过上面的步骤得到射线 OC 以后, 把它反向延长得到直线 CD . 直线 CD 与直线 AB 是什么关系?



如图 11.3-3, 将 $\angle AOB$ 对折, 再折出一个直角三角形 (使第一条折痕为斜边), 然后展开. 观察两次折叠形成的三条折痕, 你能得出什么结论?

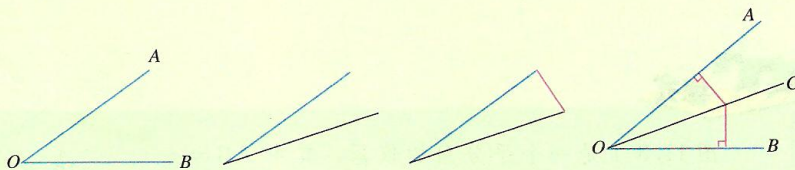


图 11.3-3

可以看出, 第一条折痕是 $\angle AOB$ 的平分线 OC , 第二次折叠形成的两条折痕是角的平分线上一点到 $\angle AOB$ 两边的距离, 这两个距离相等.

由此我们得到角的平分线的性质:

角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

下面, 我们利用三角形全等证明这个性质. 首先, 要分清其中的“已知”和“求证”. 显然, 已知为“一个点在一个角的平分线上”, 要证的结论为“这个点到这个角两边的距离相等”. 为了更直观、清楚地表达题意, 我们通常在证明之前画出图形, 并用符号表示已知和求证.

如图 11.3-4, $\angle AOC = \angle BOC$, 点 P 在 OC 上, $PD \perp OA$, $PE \perp OB$, 垂足分别为点 D , E . 求证 $PD = PE$.

证明: $\because PD \perp OA, PE \perp OB,$

$\therefore \angle PDO = \angle PEO = 90^\circ.$

在 $\triangle PDO$ 和 $\triangle PEO$ 中,

$$\begin{cases} \angle PDO = \angle PEO, \\ \angle AOC = \angle BOC, \\ OP = OP, \end{cases}$$

$\therefore \triangle PDO \cong \triangle PEO (\text{AAS}).$

$\therefore PD = PE.$

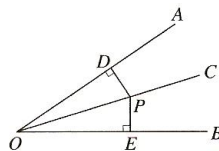


图 11.3-4

一般情况下，我们要证明一个几何中的命题时，会按照类似的步骤进行，即

1. 明确命题中的已知和求证；
2. 根据题意，画出图形，并用数学符号表示已知和求证；
3. 经过分析，找出由已知推出求证的途径，写出证明过程。



如图 11.3-5，要在 S 区建一个集贸市场，使它到公路、铁路距离相等，离公路与铁路交叉处 500 米。这个集贸市场应建于何处（在图上标出它的位置，比例尺为 1 : 20 000）？

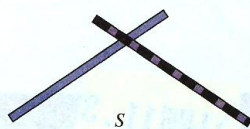


图 11.3-5

我们知道，角的平分线上的点到角的两边的距离相等。到角的两边的距离相等的点是否在角的平分线上呢？利用三角形全等，可以得到

角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上。

根据上述结论，就知道这个集贸市场应建于何处了。

按照上述证明命题的步骤，自己证一证这个结论。

例 如图 11.3-6， $\triangle ABC$ 的角平分线 BM ， CN 相交于点 P 。求证：点 P 到三边 AB ， BC ， CA 的距离相等。

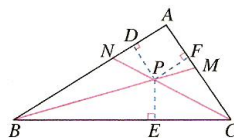


图 11.3-6

证明：过点 P 作 PD ， PE ， PF 分别垂直于 AB ， BC ， CA ，垂足为 D ， E ， F 。

\because BM 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 P 在 BM 上，

$$\therefore PD = PE.$$

同理 $PE = PF$ 。

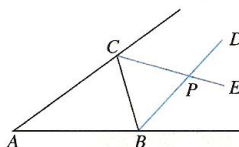
$$\therefore PD = PE = PF.$$

即点 P 到三边 AB ， BC ， CA 的距离相等。

想一想，点 P 在 $\angle A$ 的平分线上吗？这说明三角形的三条角平分线有什么关系？

练习

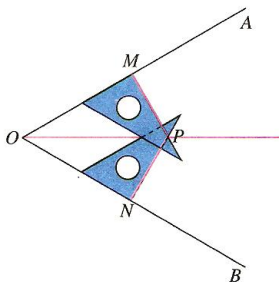
如图, $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 的外角的平分线 BD 与 $\angle C$ 的外角的平分线 CE 相交于点 P . 求证: 点 P 到三边 AB, BC, CA 所在直线的距离相等.



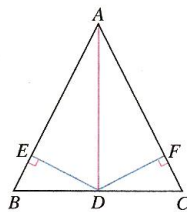
习题11.3

复习巩固

1. 用三角尺可按下面方法画角平分线: 在已知的 $\angle AOB$ 的两边上, 分别取 $OM=ON$, 再分别过点 M, N 作 OA, OB 的垂线, 交点为 P , 画射线 OP , 则 OP 平分 $\angle AOB$. 为什么?

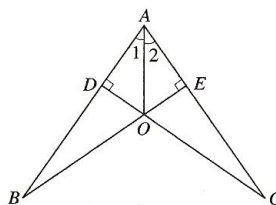


(第1题)



(第2题)

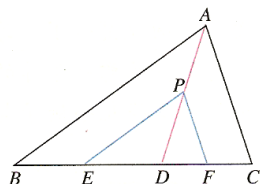
2. $\triangle ABC$ 中, AD 是它的角平分线, 且 $BD=CD$, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E, F . 求证 $EB=FC$.
3. 如图, $CD \perp AB$, $BE \perp AC$, 垂足分别为 D, E , BE, CD 相交于点 O , $OB=OC$. 求证 $\angle 1 = \angle 2$.



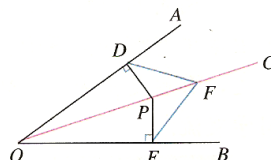
(第3题)

综合运用

4. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是它的角平分线, P 是 AD 上的一点, $PE \parallel AB$ 交 BC 于 E , $PF \parallel AC$ 交 BC 于 F . 求证: D 到 PE 的距离与 D 到 PF 的距离相等.



(第4题)

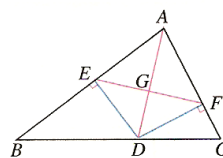


(第5题)

5. 如图, OC 是 $\angle AOB$ 的平分线, P 是 OC 上的一点, $PD \perp OA$ 交 OA 于 D , $PE \perp OB$ 交 OB 于 E . F 是 OC 上的另一点, 连接 DF , EF . 求证 $DF = EF$.

拓广探索

6. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别是 E , F , 连接 EF . EF 与 AD 交于 G . AD 与 EF 垂直吗? 证明你的结论.



(第6题)

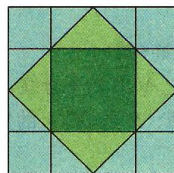
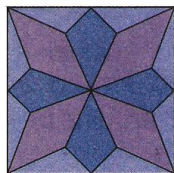
数学活动



数学活动

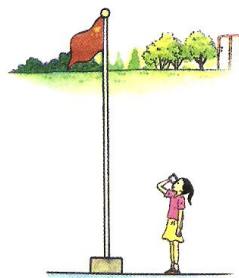
活动 1

下图是两个根据全等形设计的图案. 仔细观察一下, 每个图案中有哪些全等形? 有几种全等三角形? 注意一下你的身边, 哪些是全等形? 哪些是全等三角形? 各找几个例子与同学交流.



活动 2 测量旗杆的高度

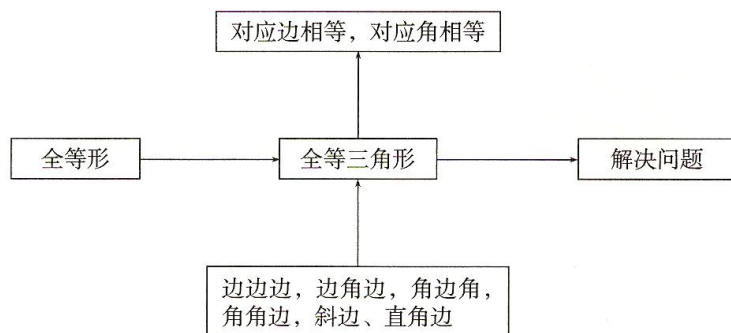
操场上有一根旗杆. 你能利用一些简易工具, 根据全等三角形的有关知识, 测量出旗杆的高吗?



小 结

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

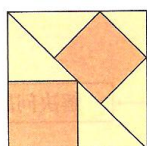
1. 举一些全等形的实际例子。全等三角形的对应边有什么关系？对应角呢？
2. 一个三角形有三条边、三个角。从中任选三个来判定两个三角形全等，哪些是能够判定的？哪些是不能够判定的？
3. 学习本章内容，可以解决一些实际问题，例如长度与角度的度量问题，就是从全等三角形对应边相等、对应角相等出发，设法形成满足全等条件的两个三角形，从而得到结果。
4. 学了本章，你对角的平分线有了哪些新的认识？你能用全等三角形证明角的平分线的性质吗？
5. 你能结合本章的有关问题，说一说证明一个结论的过程吗？

复习题 11

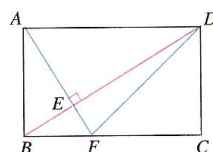
复习题 11

复习巩固

1. 如图, 其中含有三个正方形, 图中有几种全等三角形? 每种各有几个?



(第 1 题)



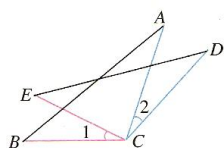
(第 2 题)

2. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AF \perp BD$ 于 E , 交 BC 于 F , 连接 DF .

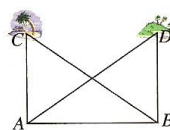
(1) 图中有全等三角形吗?

(2) 图中有面积相等但不全等的三角形吗?

3. 如图, $CD=CA$, $\angle 1=\angle 2$, $EC=BC$. 求证 $DE=AB$.



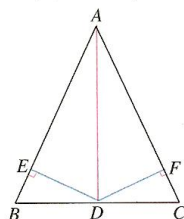
(第 3 题)



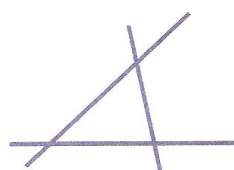
(第 4 题)

4. 如图, 海岸上有 A, B 两个观测点, 点 B 在点 A 的正东方, 海岛 C 在观测点 A 的正北方, 海岛 D 在观测点 B 的正北方, 从观测点 A 看海岛 C, D 的视角 $\angle CAD$ 与从观测点 B 看海岛 C, D 的视角 $\angle CBD$ 相等. 那么海岛 C, D 到观测点 A, B 所在海岸的距离相等. 为什么?

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别是 E, F , $BE=CF$. 求证: AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.



(第 5 题)

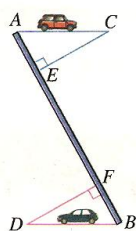


(第 6 题)

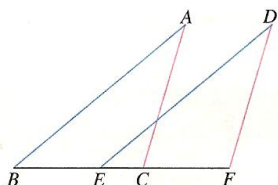
6. 如上页图, 为了促进当地旅游发展, 某地要在三条公路围成的一块平地上修建一个度假村. 要使这个度假村到三条公路的距离相等, 应在何处修建?

综合运用

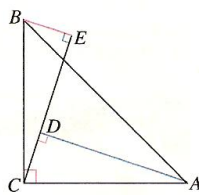
7. 如图, 两车从路段 A, B 的两端同时出发, 以相同的速度行驶, 相同时间后分别到达 C, D 两地, 两车行进的路线平行. 那么 C, D 两地到路段 AB 的距离相等吗? 为什么?



(第7题)



(第8题)

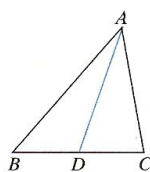


(第9题)

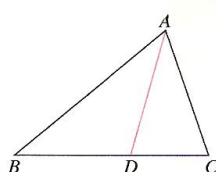
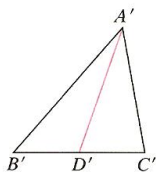
8. 如图, $AB=DE$, $AC=DF$, $BE=CF$. 求证 $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$.
 9. 如图, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, $BE \perp CE$, $AD \perp CE$ 于 D , $AD=2.5$ cm, $DE=1.7$ cm. 求 BE 的长.

拓广探索

10. 如图, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, $AD, A'D'$ 分别是 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 的对应边上的中线. AD 与 $A'D'$ 有什么关系? 证明你的结论.



(第10题)



(第11题)

11. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是它的角平分线. 求证 $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = AB : AC$.
 (提示: 作 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E, F)
 12. 证明: 如果两个三角形有两条边和其中一边上的中线对应相等, 那么这两个三角形全等. (提示: 首先分清已知和求证, 然后画出图形, 再结合图形用数学符号表示已知和求证)

第十二章 轴对称



第十二章

轴对称

我们生活在一个充满对称的世界中：许多建筑都设计成对称形，艺术作品的创作往往也从对称角度考虑，自然界的许多动植物也按对称形生长，中国的方块字中有些也具有对称性……对称给我们带来多少美的感受！

轴对称是对称中重要的一种。这一章，我们将从生活中的对称出发，研究几何图形的轴对称，并进一步利用轴对称来研究等腰三角形的性质。

让我们一起走进轴对称世界，探索它的秘密吧！

12.1 轴对称



12.1 轴对称

对称现象无处不在，从自然景观到分子结构，从建筑物到艺术作品，甚至日常生活用品，人们都可以找到对称的例子（图 12.1-1）.

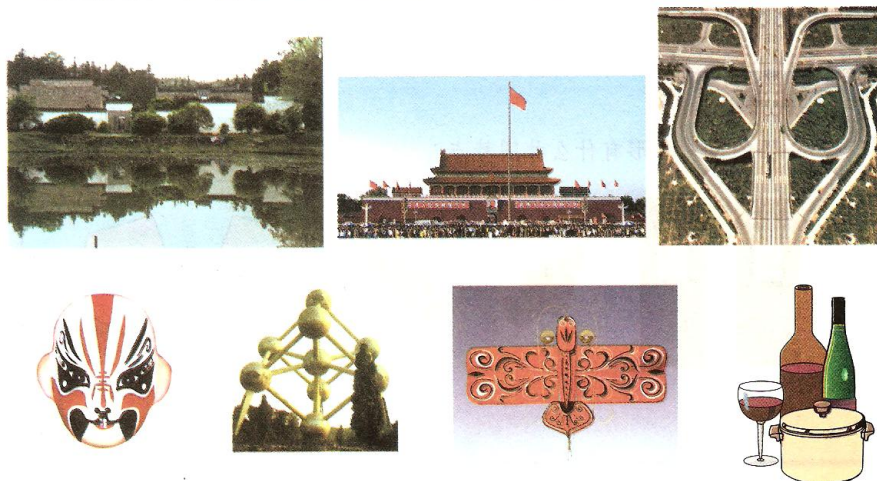


图 12.1-1

如图 12.1-2，把一张纸对折，剪出一个图案（折痕处不要完全剪断），再打开这张对折的纸，就剪出了美丽的窗花. 观察得到的窗花和图 12.1-1 中的图形，你能发现它们有什么共同的特点吗？



图 12.1-2

像窗花一样，如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做**轴对称图形**（symmetric figure），这条直线就是它的**对称轴**（axis of symmetry）. 这时，我们也说这个图形关于这条直线（成轴）对称.

练习

下面的图形是轴对称图形吗？如果是，指出它的对称轴。



(1)



(2)



(3)



(4)



(5)



思考

下面的每对图形有什么共同特点？

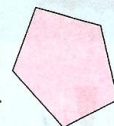
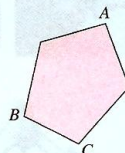
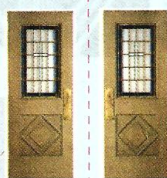


图 12.1-3

图 12.1-3 中的每一对图形，如果沿着虚线折叠，左边的图形能与右边的图形重合。

像这样，把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**关于这条直线对称**，这条直线叫做**对称轴**，折叠后重合的点是对应点，叫做**对称点** (symmetric points)。你能再举出一些生活中两个图形成轴对称的例子吗？

请你标出图 12.1-3 中点 A , B , C 的对称点 A' , B' , C' 。

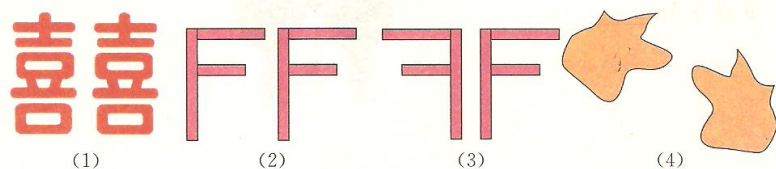
思考

成轴对称的两个图形全等吗？如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形全等吗？这两个图形对称吗？

把成轴对称的两个图形看成一个整体，它就是一个轴对称图形，把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，这两个图形关于这条轴对称。

练习

下面给出的每幅图形中的两个图案是轴对称的吗？如果是，试着找出它们的对称轴，并找出一对对称点。



思考

如图 12.1-4， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 MN 对称，点 A' ， B' ， C' 分别是点 A ， B ， C 的对称点，线段 AA' ， BB' ， CC' 与直线 MN 有什么关系？

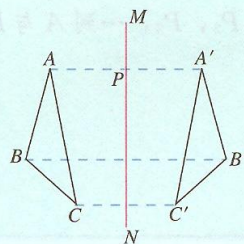


图 12.1-4

图 12.1-4 中，点 A ， A' 是对称点，设 AA' 交对称轴 MN 于点 P ，将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 沿 MN 折叠后，点 A 与 A' 重合。于是有

$$AP=PA',$$

$$\angle MPA=\angle MPA'=90^\circ.$$

对于其他的对应点,如点 B, B' ; 点 C, C' 也有类似的情况. 因此, 对称轴所在直线经过对称点所连线段的中点, 并且垂直于这条线段.

经过线段中点并且垂直于这条线段的直线, 叫做这条线段的 **垂直平分线** (perpendicular bisector). 这样, 我们就得到图形轴对称的性质:

如果两个图形关于某条直线对称, 那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.

类似地, **轴对称图形的对称轴, 是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.** 例如图 12.1-5 中,

l 垂直平分 _____ ,
 l 垂直平分 _____ ,
 l 垂直平分 _____ .

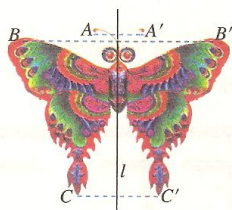


图 12.1-5



如图 12.1-6, 木条 l 与 AB 钉在一起, l 垂直平分 AB , P_1, P_2, P_3, \dots 是 l 上的点, 分别量一量点 P_1, P_2, P_3, \dots 到 A 与 B 的距离, 你有什么发现?

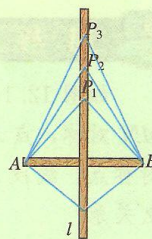


图 12.1-6

可以发现, 点 P_1, P_2, P_3, \dots 到点 A 的距离与它们到点 B 的距离分别相等. 如果把线段 AB 沿直线 l 对折, 线段 P_1A 与 P_1B 、线段 P_2A 与 P_2B 、线段 P_3A 与 P_3B ……都是重合的, 因此它们也分别相等.

由此我们可以得出线段垂直平分线的性质:

线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等.

利用判定两个三角形全等的方法, 也可以证明这个性质.

如图 12.1-7, 直线 $l \perp AB$, 垂足是 C , $AC=CB$, 点 P 在 l 上. 求证 $PA=PB$.

证明: $\because l \perp AB$,
 $\therefore \angle PCA = \angle PCB$.
又 $AC=CB$, $PC=PC$,
 $\therefore \triangle PCA \cong \triangle PCB$ (SAS).
 $\therefore PA=PB$.

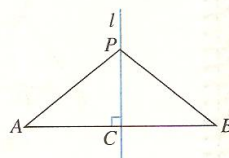


图 12.1-7

反过来, 如果 $PA=PB$, 那么点 P 是否在线段 AB 的垂直平分线上呢?



如图 12.1-8, 用一根木棒和一根弹性均匀的橡皮筋, 做一个简易的“弓”, “箭”通过木棒中央的孔射出去, 怎样才能保持射出箭的方向与木棒垂直呢? 为什么?

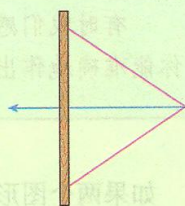


图 12.1-8

通过探究可以得到:

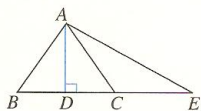
与一条线段两个端点距离相等的点, 在这条线段的垂直平分线上.

从上面两个结论可以看出: 在线段 AB 的垂直平分线 l 上的点与 A , B 的距离都相等; 反过来, 与两点 A , B 的距离相等的点都在 l 上, 所以直线 l 可以看成与两点 A , B 的距离相等的所有点的集合.

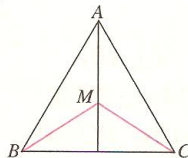
你能证明这个结论吗?

练习

1. 如图, $AD \perp BC$, $BD = DC$, 点 C 在 AE 的垂直平分线上, AB , AC , CE 的长度有什么关系? $AB + BD$ 与 DE 有什么关系?



(第1题)



(第2题)

2. 如图, $AB = AC$, $MB = MC$, 直线 AM 是线段 BC 的垂直平分线吗?

思考

有时我们感觉两个平面图形是轴对称的, 如何验证呢? 不折叠图形, 你能准确地作出轴对称图形的对称轴吗?

如果两个图形成轴对称, 其对称轴就是任何一对对应点所连线段的垂直平分线. 因此, 我们只要找到一对对应点, 作出连接它们的线段的垂直平分线, 就可以得到这两个图形的对称轴.

例 如图 12.1-9(1), 点 A 和点 B 关于某条直线成轴对称, 你能作出这条直线吗?

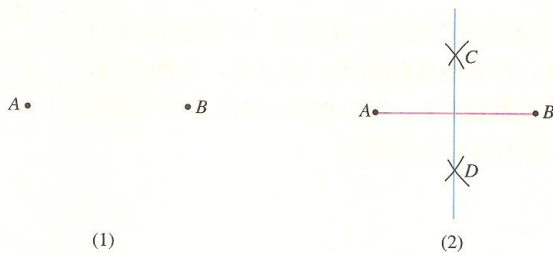


图 12.1-9

分析: 我们只要连接点 A 和点 B , 画出线段 AB 的垂直平分线, 就可以得

到点 A 和点 B 的对称轴. 而由两点确定一条直线和线段垂直平分线的性质, 只要作出到点 A, B 距离相等的两点即可.

作法: 如图 12.1-9(2).

(1) 分别以点 A, B 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧 (想一想为什么), 两弧相交于 C, D 两点;

(2) 作直线 CD .

CD 即为所求的直线.

这个作法实际上就是线段垂直平分线的尺规作图. 我们也可以用这种方法确定线段的中点.

同样, 对于轴对称图形, 只要找到任意一组对应点, 作出对应点所连线段的垂直平分线, 就得到此图形的对称轴.

例如, 对于图 12.1-10 的五角星, 我们可以找出它的一对对应点 A 和 A' , 连接 AA' , 作出线段 AA' 的垂直平分线 l , 则 l 就是这个五角星的一条对称轴.

类似地, 你能作出这个五角星的其他对称轴吗?

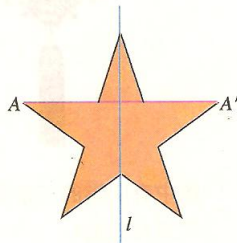
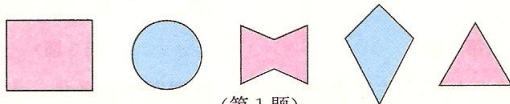


图 12.1-10

练习

1. 作出下列图形的一条对称轴, 和同学比较一下, 你们作出的对称轴一样吗?

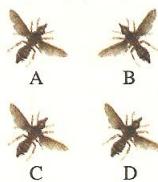


(第 1 题)

2. 如图, 角是轴对称图形吗? 如果是, 它的对称轴是什么?



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图, 与图形 A 成轴对称的是哪个图形? 画出它们的对称轴.

习题12.1

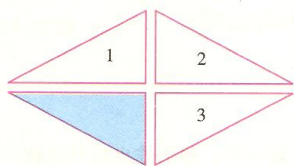
复习巩固

1. 下面的图形是轴对称图形吗？如果是，你能画出它的对称轴吗？

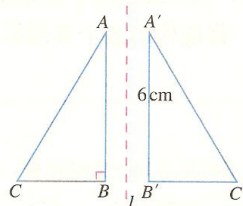


(第1题)

2. 图中有阴影的三角形与哪些三角形成轴对称？整个图形是轴对称图形吗？它共有几条对称轴？

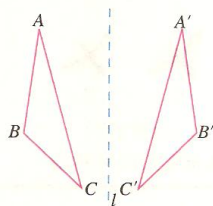


(第2题)

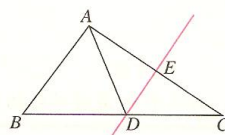


(第3题)

3. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，根据图中的条件，求 $\angle A'B'C'$ 的度数和 AB 的长。
4. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，这两个三角形全等吗？如果 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，那么 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 一定关于某条直线 l 对称吗？



(第4题)

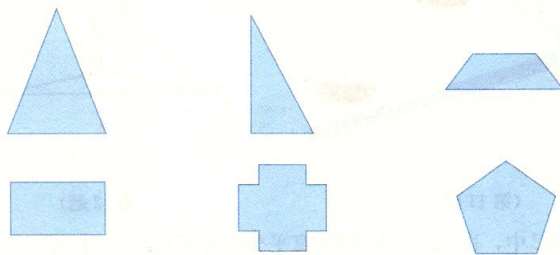


(第5题)

5. 如上页图, $\triangle ABC$ 中, DE 是 AC 的垂直平分线, $AE=3\text{ cm}$, $\triangle ABD$ 的周长为 13 cm , 求 $\triangle ABC$ 的周长.

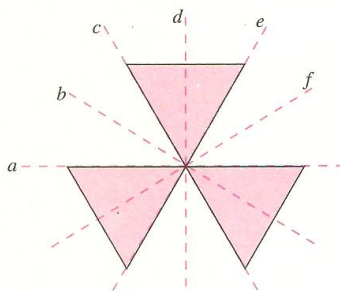
综合运用

6. 下列各图形是轴对称图形吗? 如果是, 画出它们的一条对称轴.

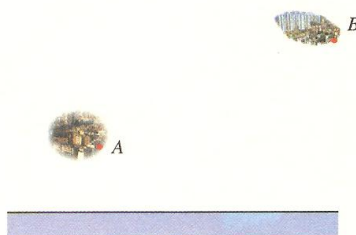


(第 6 题)

7. 平面内两条相交直线是轴对称图形吗? 如果是, 它有几条对称轴? 画画看.
8. 如图所示的虚线中, 哪些是图形的对称轴?



(第 8 题)



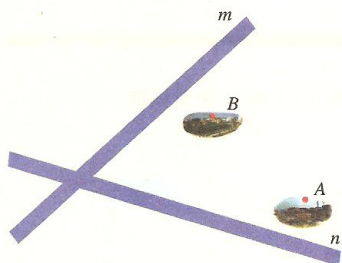
(第 9 题)

9. 如图, 某地由于居民增多, 要在公路边增加一个公共汽车站, A , B 是路边两个新建小区, 这个公共汽车站建在什么位置, 能使两个小区到车站的路程一样长?
10. 如第 4 题图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称, 延长对应线段 AB 和 $A'B'$, 两条延长线相交吗? 交点与对称轴 l 有什么关系? 延长其他对应线段呢? 再找几个成轴对称的图形观察一下, 你能发现什么规律?

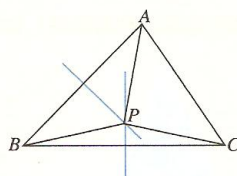
拓广探索

11. 电信部门要修建一座电视信号发射塔, 如下页图, 按照设计要求, 发射塔到两个

城镇 A, B 的距离必须相等. 到两条高速公路 m 和 n 的距离也必须相等. 发射塔应修建在什么位置? 在图上标出它的位置.



(第 11 题)



(第 12 题)

12. 如图, $\triangle ABC$ 中, 边 AB, BC 的垂直平分线交于点 P .

(1) 求证 $PA=PB=PC$.

(2) 点 P 是否也在边 AC 的垂直平分线上呢? 由此你还能得出什么结论?

12.2 作轴对称图形



12.2 作轴对称图形

12.2.1 作轴对称图形

如图 12.2-1，在一张半透明的纸的左边部分，画一只左脚印，把这张纸对折后描图，打开对折的纸，就能得到相应的右脚印。这时，右脚印和左脚印成轴对称，折痕所在直线就是它们的对称轴，并且连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分。

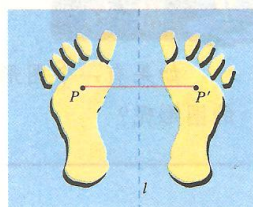


图 12.2-1

类似地，我们也可以由一个图形得到与它成轴对称的另一个图形，重复这个过程，可以得到美丽的图案（图 12.2-2，12.2-3）。



图 12.2-2

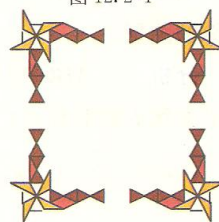


图 12.2-3

对称轴方向和位置发生变化时，得到的图形的方向和位置也会发生变化（图 12.2-4）。

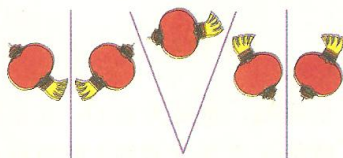


图 12.2-4

自己动手在一张纸上画一个图形，将这张纸折叠，描图，再打开纸，看看你得到了什么？改变折痕的位置并重复几次，你又得到了什么？与同学交流一下。



由一个平面图形可以得到它关于一条直线 l 成轴对称的图形，这个图形与原图形的形状、大小完全相同；

新图形上的每一点，都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点；

连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分。



如果有一个图形和一条直线，如何作出与这个图形关于这条直线对称的图形呢？

例 1 如图 12.2-5(1)，已知 $\triangle ABC$ 和直线 l ，作出与 $\triangle ABC$ 关于直线 l 对称的图形。

分析： $\triangle ABC$ 可以由三个顶点的位置确定，只要能分别作出这三个顶点关于直线 l 的对称点，连接这些对称点，就能得到要作的图形。

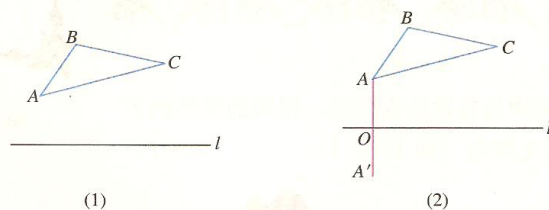


图 12.2-5

作法：如图 12.2-5(2)。

(1) 过点 A 作直线 l 的垂线，垂足为点 O ，在垂线上截取 $OA' = OA$ ，点 A' 就是点 A 关于直线 l 的对称点（想一想为什么）；

(2) 类似地，请你自己在图 12.2-5(2) 上分别作出点 B, C 关于直线 l 的对称点 B', C' ；

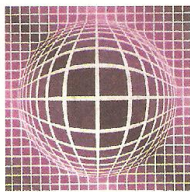
(3) 连接 $A'B', B'C', C'A'$ ，得到的 $\triangle A'B'C'$ 即为所求。

作好后，
你也可以通过
折叠的方法验证一下。



几何图形都可以看作由点组成，我们只要分别作出这些点关于对称轴的对应点，再连接这些对应点，就可以得到原图形的轴对称图形；对于一些由直线、线段或射线组成的图形，只要作出图形中的一些特殊点（如线段端点）的对称点，连接这些对称点，就可以得到原图形的轴对称图形。

利用轴对称，可以设计出精美的图案。在许多美术作品中，都能看到轴对称的例子（图 12.2-6）。



利用轴对称，
你能设计一些图案
吗？

图 12.2-6

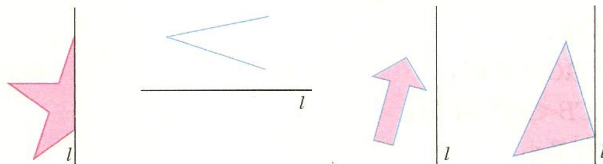
有时，将平移和轴对称结合起来，可以设计出更美丽的图案，许多镶边和背景的图案就是这样设计的（图 12.2-7）。



图 12.2-7

练习

1. 如图，把下列图形补成关于直线 l 对称的图形。

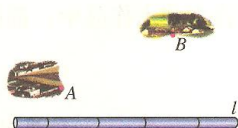


（第 1 题）

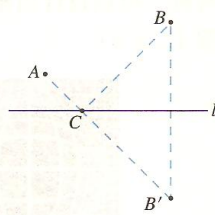
2. 用纸片剪一个三角形，分别沿它一边的中线、高、角平分线对折，看看哪些部分能够重合，哪些部分不能重合。



如图 12.2-8(1), 要在燃气管道 l 上修建一个泵站, 分别向 A, B 两镇供气. 泵站修在管道的什么地方, 可使所用的输气管线最短?
你可以在 l 上找几个点试一试, 能发现什么规律?



(1)



(2)

图 12.2-8

我们可以把管道 l 近似地看成一条直线 (图 12.2-8(2)), 问题就是要在 l 上找一点 C , 使 AC 与 CB 的和最小. 设 B' 是 B 的对称点, 本问题也就是要使 AC 与 CB' 的和最小. 在连接 AB' 的线中, 线段 AB' 最短. 因此, 线段 AB' 与直线 l 的交点 C 的位置即为所求.

为了证明点 C 的位置即为所求, 我们不妨在直线 l 上另外任取一点 C' , 连接 AC' , BC' , $B'C'$.

因为直线 l 是点 B, B' 的对称轴, 点 C, C' 在 l 上, 所以 $CB = CB', C'B = C'B'$.

$$\therefore AC + CB = AC + CB' = AB'.$$

在 $\triangle AC'B'$ 中,

$$\because AB' < AC' + C'B',$$

$$\therefore AC + CB < AC' + C'B,$$

即 $AC + CB$ 最小.

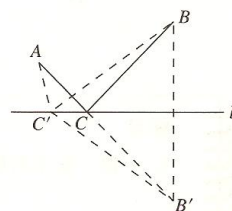


图 12.2-9

12.2.2 用坐标表示轴对称



图 12.2-10 是一幅老北京城的示意图，其中西直门和东直门是关于中轴线对称的。如果以天安门为原点，分别以长安街和中轴线为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系，对应于如图所示的东直门的坐标，你能说出西直门的坐标吗？

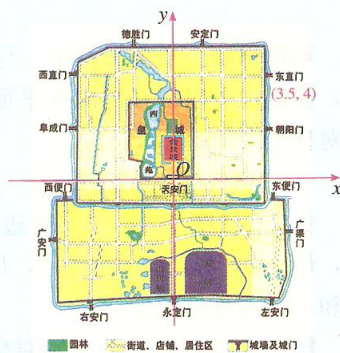
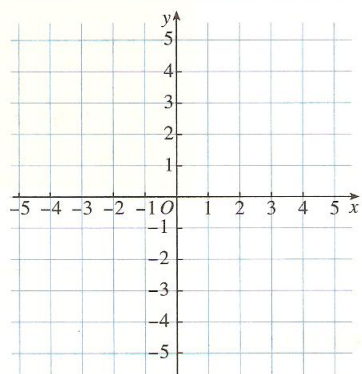


图 12.2-10

在如图 12.2-11 的平面直角坐标系中，画出下列已知点及其对称点，并把坐标填入表格中，看看每对对称点的坐标有怎样的规律，再和同学讨论一下。

已知点	$A(2, -3)$	$B(-1, 2)$	$C(-6, -5)$	$D(\frac{1}{2}, 1)$	$E(4, 0)$
关于 x 轴的对称点	$A'(_, _)$	$B'(_, _)$	$C'(_, _)$	$D'(_, _)$	$E'(_, _)$
关于 y 轴的对称点	$A''(_, _)$	$B''(_, _)$	$C''(_, _)$	$D''(_, _)$	$E''(_, _)$



再找几个点，分别画出它们的对称点，检验一下你发现的规律。

图 12.2-11



点 (x, y) 关于 x 轴对称的点的坐标为(____, ____);

点 (x, y) 关于 y 轴对称的点的坐标为(____, ____).

利用平面直角坐标系中,与已知点关于 x 轴或 y 轴对称的点的坐标的规律,我们也可以很容易地在平面直角坐标系中作出与一个图形关于 x 轴或 y 轴对称的图形.

例 2 如图 12.2-12, 四边形 $ABCD$ 的四个顶点的坐标分别为 $A(-5, 1)$, $B(-2, 1)$, $C(-2, 5)$, $D(-5, 4)$, 分别作出与四边形 $ABCD$ 关于 y 轴和 x 轴对称的图形.

解: 点 (x, y) 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-x, y)$, 因此四边形 $ABCD$ 的顶点 A, B, C, D 关于 y 轴对称的点分别为 $A'(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$, $B'(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$, $C'(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$, $D'(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$, 依次连接 $A'B', B'C', C'D', D'A'$, 就可得到与四边形 $ABCD$ 关于 y 轴对称的四边形 $A'B'C'D'$.

类似地, 请你在图 12.2-12 上作出与四边形 $ABCD$ 关于 x 轴对称的图形.

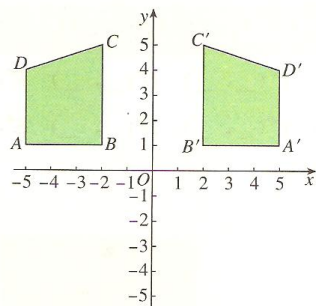


图 12.2-12

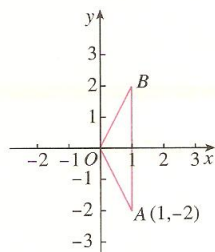
对于这类问题, 只要先求出已知图形中的一些特殊点(如多边形的顶点)的对称点的坐标, 描出并连接这些点, 就可以得到这个图形的轴对称图形.

练习

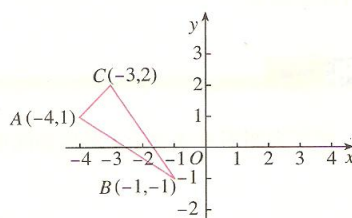
1. 分别写出下列各点关于 x 轴和 y 轴对称的点的坐标:

$(-2, 6)$, $(1, -2)$, $(-1, 3)$, $(-4, -2)$, $(1, 0)$.

2. 如图, $\triangle ABO$ 关于 x 轴对称, 点 A 的坐标为 $(1, -2)$, 标出点 B 的坐标.



(第2题)



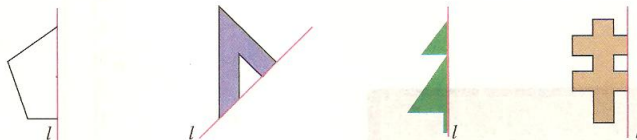
(第3题)

3. 如图, 利用关于坐标轴对称的点的坐标的特点, 分别作出与 $\triangle ABC$ 关于 x 轴和 y 轴对称的图形.

习题12.2

复习巩固

1. 把下列各图形补成关于 l 对称的图形.

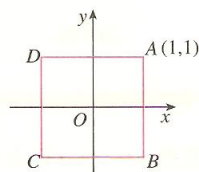


(第1题)

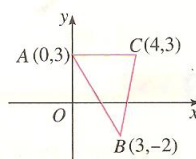
2. 分别写出下列各点关于 x 轴和 y 轴对称的点的坐标:

$(3, 6)$, $(-7, 9)$, $(6, -1)$, $(-3, -5)$, $(0, 10)$.

3. 如图, 以正方形 $ABCD$ 的中心为原点建立坐标系. 点 A 的坐标为 $(1, 1)$, 标出点 B, C, D 的坐标.



(第3题)

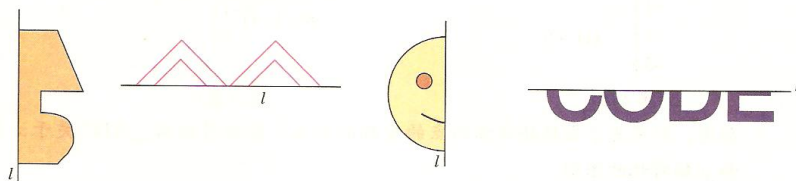


(第4题)

4. 如上页图, 利用关于坐标轴对称的点的坐标的特点, 分别作出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴和 y 轴对称的图形.

综合运用

5. 如图, 把下列图形补成关于 l 对称的图形, 看一看你得到了什么.

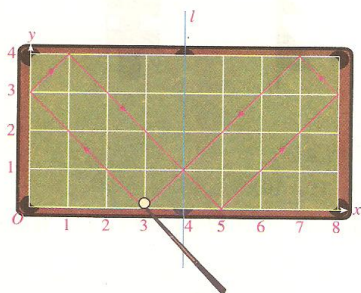


(第5题)

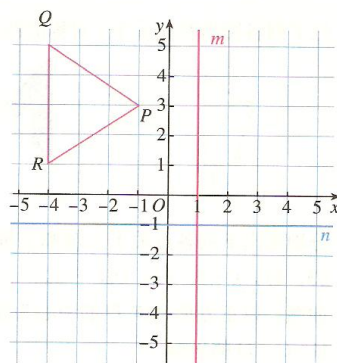
6. 根据下列点的坐标的变化, 判断它们进行了怎样的运动:

- (1) $(-1, 3) \rightarrow (-1, -3)$; (2) $(-5, -6) \rightarrow (-5, -1)$;
(3) $(3, 4) \rightarrow (-3, 4)$; (4) $(-2, 3) \rightarrow (2, -3)$.

7. 如图, 小球起始时位于 $(3, 0)$ 处, 沿所示的方向击球, 小球运动的轨迹如图所示, 用坐标描述这个运动, 找出小球运动的轨迹上几个关于直线 l 对称的点. 如果小球起始时位于 $(1, 0)$ 处, 仍按原来方向击球, 请你画出这时小球运动的轨迹.



(第7题)



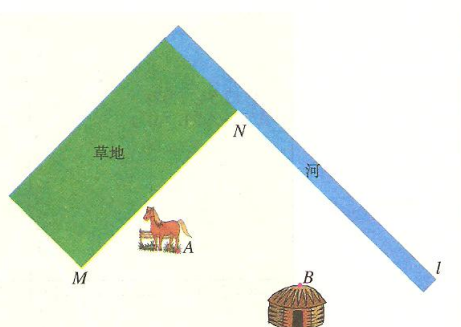
(第8题)

拓展探索

8. 如图, 分别作出 $\triangle PQR$ 关于直线 $x=1$ (记为 m) 和直线 $y=-1$ (记为 n) 对称的图形. 它们的对应点的坐标之间分别有什么关系?

信息技术应用 探索轴对称的性质

9. 如图, A 为马厩, B 为帐篷, 牧马人某一天要从马厩牵出马, 先到草地边某一处牧马, 再到河边饮马, 然后回到帐篷, 请你帮他确定这一天的最短路线.
10. 展开你的想象, 从一个或几个图形出发, 利用轴对称或与平移进行组合, 设计出一些图案, 并与同学交流.



(第9题)



信息技术应用

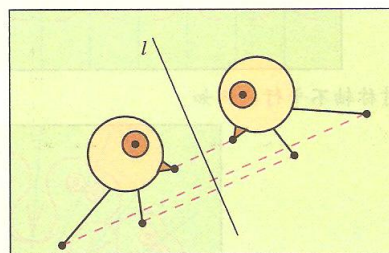
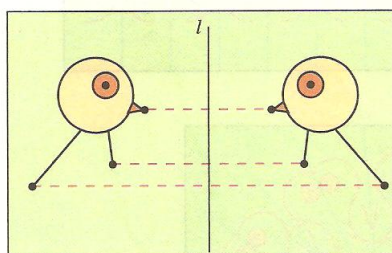
选学

探索轴对称的性质

利用图形计算器或计算机等信息技术工具, 可以很方便、直观地发现轴对称的性质, 并利用轴对称进行图案设计. 下面以“几何画板”软件为例说明.

探索轴对称的性质

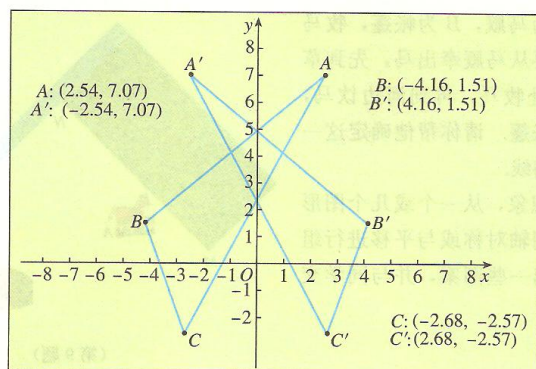
任意画一个图形, 作这个图形关于直线 l 对称的图形, 改变直线 l 的位置, 或者改变其中一个图形的位置, 观察对称点所连线段与对称轴的关系.



探索轴对称的点的坐标特点

画一个 $\triangle ABC$, 以 y 轴为对称轴作轴对称图形, 得到 $\triangle A'B'C'$, 度量点 A, A' 的坐标, 观察它们的坐标有什么关系; 再度量点 B, B' 的坐标, 观察它们的坐标有什么关系.

改变三角形的位置, 观察它们的坐标有什么变化; 再分别度量点 A, A', B, B' 的坐

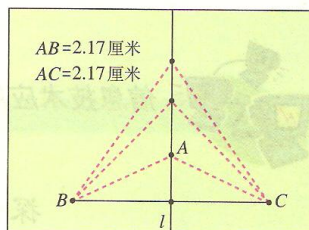


标, 观察它们的坐标有什么关系.

用同样的方法, 探索关于 x 轴对称的点的坐标关系.

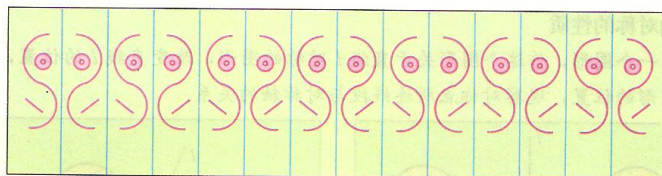
探索线段垂直平分线的性质

在线段 BC 的垂直平分线 l 上任取一点 A , 分别度量点 A 与点 B 、点 C 之间的距离, 用鼠标拖动点 A , 使点 A 在直线 l 上运动, 观察度量值的变化, 你能发现什么规律吗?

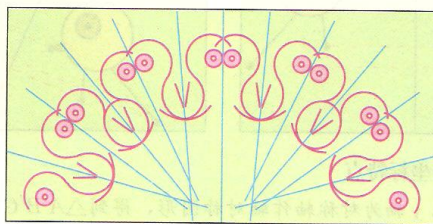


用多次轴对称进行图案设计

对称轴平行, 例如



对称轴不平行, 例如



12.3 等腰三角形

12.3 等腰三角形

12.3.1 等腰三角形



如图 12.3-1, 把一张长方形的纸按图中虚线对折, 并剪去阴影部分, 再把它展开, 得到的 $\triangle ABC$ 有什么特点?

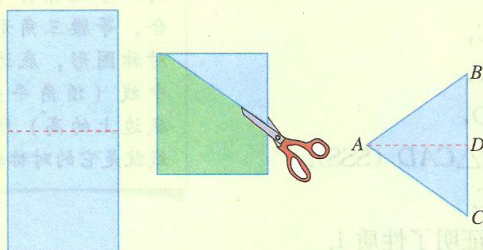


图 12.3-1

上述过程中, 剪刀剪过的两条边是相等的, 即 $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$, 我们也就得到了一个**等腰三角形** (isosceles triangle).



上面剪出的等腰三角形是轴对称图形吗?

把剪出的等腰三角形 ABC 沿折痕对折, 找出其中重合的线段和角.

由这些重合的线段和角, 你能发现等腰三角形的性质吗? 说一说你的猜想.

我们很容易发现等腰三角形的性质：

性质 1 等腰三角形的两个底角相等（简写成“等边对等角”）；

性质 2 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合。

由上面的操作过程获得启发，我们可以通过作出 $\triangle ABC$ 的对称轴，得到两个全等的三角形，从而利用三角形的全等证明这些性质。

如图 12.3-2， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，作底边 BC 的中线 AD 。

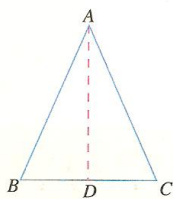


图 12.3-2

$$\begin{aligned} \because & \begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases} \\ \therefore & \triangle BAD \cong \triangle CAD \text{ (SSS)}. \\ \therefore & \angle B = \angle C. \end{aligned}$$

这样，我们就证明了性质 1。

由 $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ ，还可得出 $\angle BAD = \angle CAD$ ； $\angle BDA = \angle CDA$ ，从而 $AD \perp BC$ 。这也就证明了等腰三角形 ABC 底边上的中线 AD 平分顶角 $\angle A$ 并垂直于底边 BC 。

用类似的方法，还可以证明等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边，底边上的高平分顶角并且平分底边。这也就证明了性质 2。

从这个证明也可以看出，等腰三角形底边上的中线的左右两部分经翻转可以重合，等腰三角形是轴对称图形，底边上的中线（顶角平分线、底边上的高）所在直线就是它的对称轴。

例 1 如图 12.3-3，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 D 在 AC 上，且 $BD=BC=AD$ 。求 $\triangle ABC$ 各角的度数。

解： $\because AB=AC, BD=BC=AD,$
 $\therefore \angle ABC = \angle C = \angle BDC,$
 $\angle A = \angle ABD$ （等边对等角）。
 设 $\angle A = x$ ，则
 $\angle BDC = \angle A + \angle ABD = 2x,$

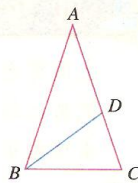


图 12.3-3

从而 $\angle ABC = \angle C = \angle BDC = 2x$.

于是在 $\triangle ABC$ 中, 有

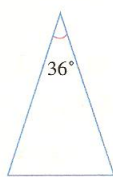
$$\angle A + \angle ABC + \angle C = x + 2x + 2x = 180^\circ.$$

解得 $x = 36^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 36^\circ$, $\angle ABC = \angle C = 72^\circ$.

练习

1. 如图, 在下列等腰三角形中, 分别求出它们的底角的度数.



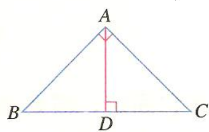
(1)



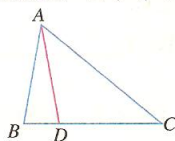
(2)

(第1题)

2. 如图, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形 ($AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$), AD 是底边 BC 上的高, 标出 $\angle B$, $\angle C$, $\angle BAD$, $\angle DAC$ 的度数. 图中有哪些相等的线段?



(第2题)



(第3题)

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AD = DC$, $\angle BAD = 26^\circ$. 求 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的度数.

思考

如图 12.3-4, 位于海上 A , B 两处的两艘救生船接到 O 处遇险船只的报警, 当时测得 $\angle A = \angle B$. 如果这两艘救生船以同样的速度同时出发, 能不能大约同时赶到出事地点 (不考虑风浪因素)?

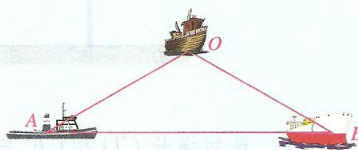


图 12.3-4

在一般的三角形中, 如果有两个角相等, 那么它们所对的边有什么关系?

由上面的思考再经过推证，我们可以进一步得到等腰三角形的判定方法：

如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简写成“等角对等边”）。

你能证明“等角对等边”吗？

例 2 求证：如果三角形一个外角的平分线平行于三角形的一边，那么这个三角形是等腰三角形。

已知： $\angle CAE$ 是 $\triangle ABC$ 的外角， $\angle 1 = \angle 2$ ， $AD \parallel BC$ （图 12.3-5）。

求证： $AB = AC$ 。

分析：要证明 $AB = AC$ ，可先证明 $\angle B = \angle C$ 。因为 $\angle 1 = \angle 2$ ，所以可以设法找出 $\angle B$ ， $\angle C$ 与 $\angle 1$ ， $\angle 2$ 的关系。

证明： $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle B$ （_____），

$\angle 2 = \angle C$ （_____）。

而已知 $\angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle B = \angle C$ 。

$\therefore AB = AC$ （_____）。

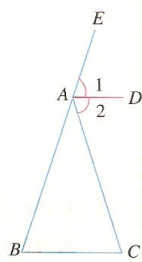


图 12.3-5

例 3 如图 12.3-6，标杆 AB 高 5 m，为了将它固定，需要由它的中点 C 向地面上与点 B 距离相等的 D ， E 两点拉两条绳子，使得点 D ， B ， E 在一条直线上。量得 $DE = 4$ m，绳子 CD 和 CE 要多长？

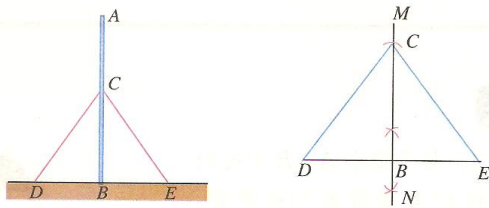


图 12.3-6

分析：显然绳长 CD 和 CE 是相等的。问题实际上就是已知底边和底边上的高求等腰三角形的腰长，如果我们能以适当的比例画出这个等腰三角形，量出它的腰长，就能得到绳长了。

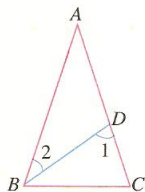
解：选取比例尺为 $1 : 100$ （即以 1 cm 代表 1 m）。

- (1) 作线段 $DE=4\text{ cm}$;
- (2) 作线段 DE 的垂直平分线 MN , 与 DE 交于点 B ;
- (3) 在 MN 上截取 $BC=2.5\text{ cm}$;
- (4) 连接 CD, CE , $\triangle CDE$ 就是所求的等腰三角形. 量出 CD 的长, 就可以计算出要求的绳长, 自己试一试!

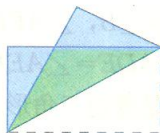
已知底边和底边上的高, 你能用尺规作图方法作出这个等腰三角形吗?

练习

1. 如图, $\angle A=36^\circ$, $\angle DBC=36^\circ$, $\angle C=72^\circ$. 分别计算 $\angle 1, \angle 2$ 的度数, 并说明图中有哪些等腰三角形.

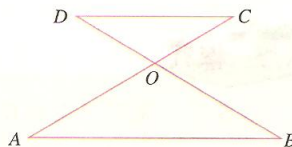


(第1题)



(第2题)

2. 如图, 把一张矩形的纸沿对角线折叠, 重合部分是一个等腰三角形吗? 为什么?
3. 如图, AC 和 BD 相交于点 O , 且 $AB \parallel DC$, $OA=OB$. 求证 $OC=OD$.



(第3题)

12.3.2 等边三角形

在等腰三角形中, 有一种特殊的等腰三角形——三条边都相等的三角形, 我们把这样的三角形叫做**等边三角形** (equilateral triangle).



把等腰三角形的性质用于等边三角形, 能得到什么结论? 一个三角形满足什么条件就是等边三角形?

由等腰三角形的性质和判定方法，可以得到：
 等边三角形的三个内角都相等，并且每一个角都等于 60° 。

三个角都相等的三角形是等边三角形。

有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形。

请你自己证明
 这些结论。

例 4 如图 12.3-7， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $DE \parallel BC$ ，交 AB ， AC 于 D ， E 。求证 $\triangle ADE$ 是等边三角形。

证明： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle A = \angle B = \angle C$ 。
 $\because DE \parallel BC$ ，
 $\therefore \angle ADE = \angle B$ ， $\angle AED = \angle C$ 。
 $\therefore \angle A = \angle ADE = \angle AED$ 。
 $\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形。

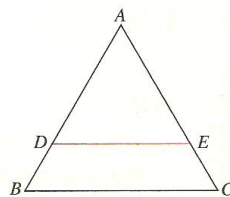


图 12.3-7

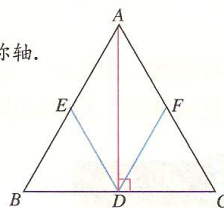
想一想，本题还有其他证法吗？



等边三角形三条中线相交于一点。画出图形，找出图中所有的全等三角形，并证明它们全等。

练习

1. 等边三角形是轴对称图形吗？如果是，指出它的对称轴。
2. 如图，等边三角形 ABC 中， AD 是 BC 上的高， $\angle BDE = \angle CDF = 60^\circ$ ，图中有哪些与 BD 相等的线段？



(第 2 题)



如图 12.3-8, 将两个含 30° 角的三角尺摆放在一起, 你能借助这个图形, 找到 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 BC 与斜边 AB 之间的数量关系吗?

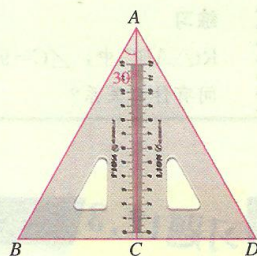


图 12.3-8

由于 $\triangle ADC$ 是 $\triangle ABC$ 的轴对称图形, 因此 $AB=AD$, $\angle BAD=2 \times 30^\circ=60^\circ$, 从而 $\triangle ABD$ 是一个等边三角形. 再由 $AC \perp BD$ 可得 $BC=CD=\frac{1}{2}AB$. 于是我们得到:

你还能用其他方法证明吗?

在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半.

例 5 图 12.3-9 是屋架设计图的一部分, 点 D 是斜梁 AB 的中点, 立柱 BC, DE 垂直于横梁 AC , $AB=7.4 \text{ m}$, $\angle A=30^\circ$, 立柱 BC, DE 要多长?

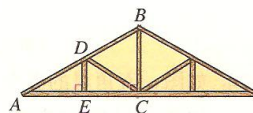


图 12.3-9

解: $\because DE \perp AC, BC \perp AC, \angle A=30^\circ$, 由上面的结论, 可得

$$BC = \frac{1}{2}AB, DE = \frac{1}{2}AD.$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2} \times 7.4 = 3.7(\text{m}).$$

$$\text{又 } AD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 3.7 = 1.85(\text{m}).$$

答：立柱 BC 的长是 3.7 m ， DE 的长是 1.85 m 。

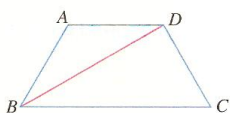
练习

$\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=2\angle A$ ， $\angle B$ 和 $\angle A$ 各是多少度？边 AB 与 BC 之间有什么关系？

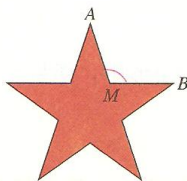
习题12.3

复习巩固

- (1) 等腰三角形的一个角是 110° ，它的另外两个角是多少度？
(2) 等腰三角形的一个角是 80° ，它的另外两个角是多少度？
- 如图， $AD\parallel BC$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，求证 $AB=AD$ 。

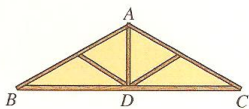


(第2题)

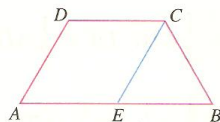


(第3题)

- 如图，五角星的五个角都是顶角为 36° 的等腰三角形，为了画出五角星，还需要知道 $\angle AMB$ 的度数，算一算 $\angle AMB$ 等于多少度。
- 如图，厂房屋顶钢架外框是等腰三角形，其中 $AB=AC$ ，立柱 $AD\perp BC$ ，且顶角 $\angle BAC=100^\circ$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ ， $\angle BAD$ ， $\angle CAD$ 各是多少度？

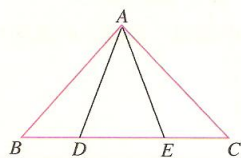


(第4题)

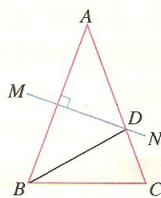


(第5题)

- 如图， $\angle A=\angle B$ ， $CE\parallel DA$ ， CE 交 AB 于 E 。求证 $\triangle CEB$ 是等腰三角形。
- 如下页图，点 D ， E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上， $AB=AC$ ， $AD=AE$ 。求证 $BD=CE$ 。



(第6题)

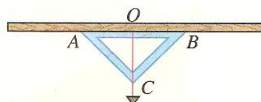


(第7题)

7. 如图, $AB=AC$, $\angle A=40^\circ$, AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于点 D . 求 $\angle DBC$ 的度数.

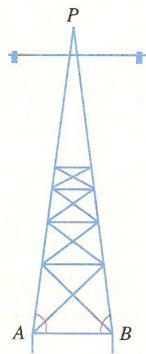
综合运用

8. 某地地震过后, 河沿村中学的同学用下面的方法检测教室的房梁是否水平:
在等腰直角三角尺斜边中点拴一条线绳, 线绳的另一端挂一个铅锤, 把这块三角尺的斜边贴在房梁上, 结果线绳经过三角尺的直角顶点, 同学们确信房梁是水平的. 他们的判断对吗? 为什么?



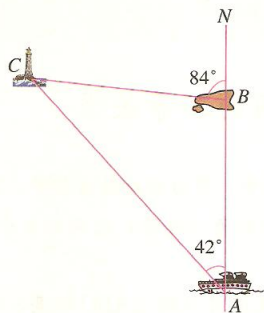
(第8题)

9. 检验员在对出厂钢架进行检验时, 采用在 $\triangle PAB$ 内测量 $\angle PAB$ 和 $\angle PBA$ 度数的方法. 如果 $\angle PAB = \angle PBA$, 就可以断定铁架中 PA 与 PB 等长. 你能说出为什么吗?

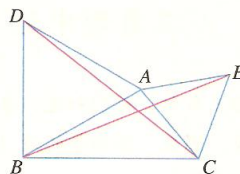


(第9题)

10. 上午8时, 一条船从海岛 A 出发, 以 15 海里/时的速度向正北航行, 10 时到达海岛 B 处. 从 A, B 望灯塔 C , 测得 $\angle NAC = 42^\circ$, $\angle NBC = 84^\circ$. 求从海岛 B 到灯塔 C 的距离.



(第10题)



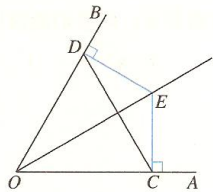
(第11题)

实验与探究 三角形中边与角之间的不等关系

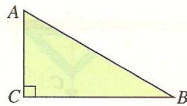
11. 如上页图, $\triangle ABD$, $\triangle AEC$ 都是等边三角形, 求证 $BE=DC$.
12. 等腰三角形两底角的平分线相等吗? 两腰上的中线呢? 两腰上的高呢? 证明其中的一个结论.

拓广探索

13. 如图, 点 E 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点, $EC \perp OA$, $ED \perp OB$, 垂足分别是 C, D . 求证:
- (1) $\angle ECD = \angle EDC$;
 - (2) $OC = OD$;
 - (3) OE 是线段 CD 的垂直平分线.



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图, 要把一块三角形的土地均匀分给甲、乙、丙三家农户去种植. 如果 $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 要使这三家农户所得土地的大小、形状都相同, 请你试着分一分, 在图上画出来.



实验与探究

选学

三角形中边与角之间的不等关系

学习了等腰三角形, 我们知道: 在一个三角形中, 等边所对的角相等; 反过来, 等角所对的边也相等. 那么, 不相等的边 (或角) 所对的角 (或边) 之间的大小关系怎样呢? 大边所对的角也大吗?

如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $AB > AC$, 那么我们可以将 $\triangle ABC$ 折叠, 使边 AC 落在 AB 上, 点 C 落在 AB 上的 D 点, 则

$$\begin{aligned}\angle C &= \angle ADE, \\ \angle ADE &> \angle B (\text{为什么?}), \\ \text{所以} \quad \angle C &> \angle B.\end{aligned}$$

这说明, 在一个三角形中, 如果两条边不等, 那么它们所对的角也不等, 大边所对的角较大.

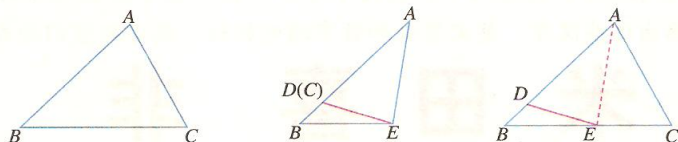


图 1

从上面的过程可以看出, 利用轴对称的性质, 可以把研究边与角之间的不等问题, 转化为较大量的一部分与较小量相等的问题, 这是几何中研究不等问题时的常用方法.

类似地, 应用这种方法, 你能说明“在一个三角形中, 如果两个角不等, 那么它们所对的边也不等, 大角所对的边较大”吗?

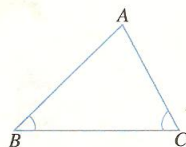


图 2

(图 2)

利用上面两个结论, 回答下面的问题:

- (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC > AB > AC$, 那么 $\angle A, \angle B, \angle C$ 有怎样的大小关系?
- (2) 如果一个三角形中最大的边所对的角是锐角, 这个三角形一定是锐角三角形吗? 为什么?
- (3) 直角三角形的哪一条边最长? 为什么?

数学活动



数学活动

活动1 艺术字与轴对称

在艺术字中，有些汉字、英文字母和阿拉伯数字是轴对称的。如图1，画出这些汉字、英文字母和数字的对称轴，或者把它们补齐。



图1

你能再写出几个轴对称的艺术字吗？画出它们的对称轴，并与同学交流。

活动2 镜子、倒影与轴对称

你检测过视力吗？直接看视力表检测视力时，要求视力表与被检测人的距离为5米。小明检测视力时，医生把视力表挂在他背后的墙上，小明是从对面的镜子里看视力表的（图2）。你知道镜子应离小明几米吗？



图2



图3

警察监视一名犯罪嫌疑人的时候，看到他右手缠着绷带（图3），而审讯这名犯罪嫌疑人时，却发现他左手缠着绷带，警察看错了吗？

图4是一辆车的车牌在水中的倒影，你知道这辆车的车牌号吗？



图4

通过镜子观察物体时，我们看到的是这个物体通过镜面反射后得到的镜像，水中的倒影也是一样的。生活中这种现象是很常见的，再找几个例子，仔细观察一下，你能总结出这种镜面反射的特点吗？它和我们学过的轴对称有什么异同？与同学交流一下你的发现。

活动3 等腰三角形中相等的线段

猜想一下，等腰三角形底边中点到两腰的距离相等吗？如图5，你可以将等腰三角形 ABC 沿对称轴 AD 折叠，观察 DE 与 DF 的关系，并证明你的结论。

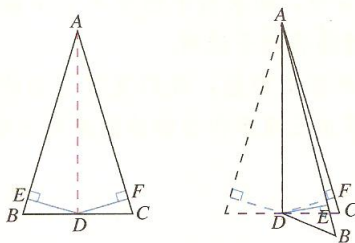


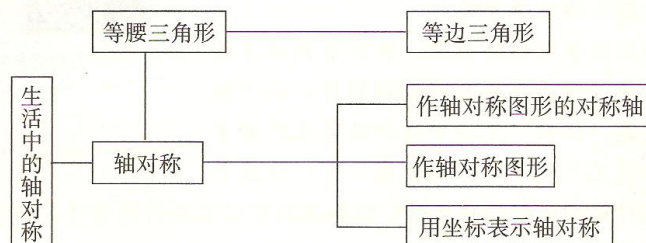
图5

如果 DE ， DF 分别是 AB ， AC 上的中线或 $\angle ADB$ ， $\angle ADC$ 的平分线，它们还相等吗？由等腰三角形是轴对称图形，利用类似的方法，还可以得到等腰三角形中哪些线段相等？证明其中的一些结论。

小 结

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 在现实世界中，存在着大量的轴对称现象，你能举出一些例子吗？成轴对称的图形有什么特点？
2. 在我们学过的几何图形中，有哪些是轴对称图形？它们的对称轴与这个图形有怎样的位置关系？
3. 对于成轴对称的两个图形，对应点所连线段与对称轴有什么关系？如何作出一个图形的轴对称图形？
4. 在平面直角坐标系中，如果两个图形关于 x 轴或 y 轴对称，那么对应点的坐标有什么关系？请结合例子说明。
5. 利用等腰三角形的轴对称性，我们发现了它的哪些性质？你能通过全等三角形加以证明吗？等边三角形作为特殊的等腰三角形，有哪些特殊性质？

复习题 12

复习题12

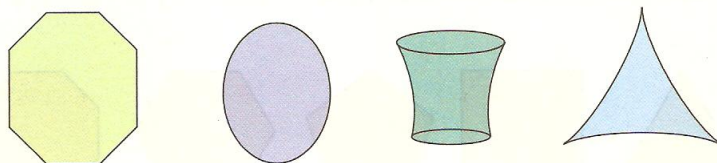
复习巩固

1. 下列图形是轴对称图形吗？如果是，找出它们的对称轴。



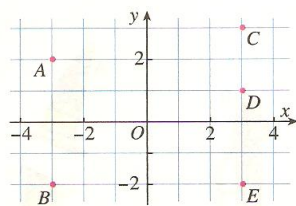
(第 1 题)

2. 画出下列轴对称图形的对称轴。

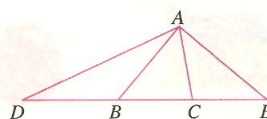


(第 2 题)

3. 如图所示的点 A, B, C, D, E 中，哪两个点关于 x 轴对称？哪两个点关于 y 轴对称？点 C 和点 E 关于 x 轴对称吗？为什么？

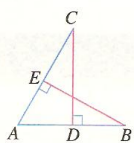


(第 3 题)

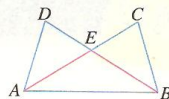


(第 4 题)

4. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=50^\circ$ ， $\angle ACB=80^\circ$ ，延长 CB 至 D ，使 $DB=BA$ ，延长 BC 至 E ，使 $CE=CA$ 。连接 AD, AE 。求 $\angle D, \angle E, \angle DAE$ 的度数。
5. 如下页图， D, E 分别是 AB, AC 的中点， $CD \perp AB$ 于 D ， $BE \perp AC$ 于 E 。求证 $AC=AB$ 。



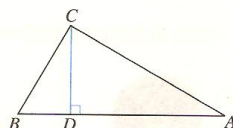
(第5题)



(第6题)

6. 如图, $AD=BC$, $AC=BD$, 求证 $\triangle EAB$ 是等腰三角形.

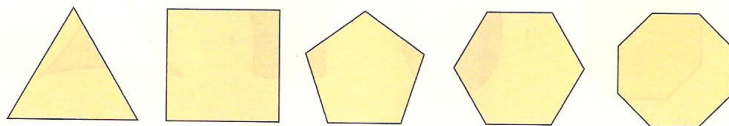
7. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, CD 是高, $\angle A=30^\circ$. 求证 $BD=\frac{1}{4}AB$.



(第7题)

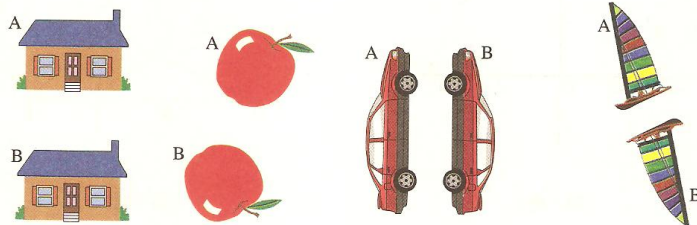
综合运用

8. 试确定如图所示的正多边形的对称轴的条数, 一般地, 一个正 n 边形有多少条对称轴?



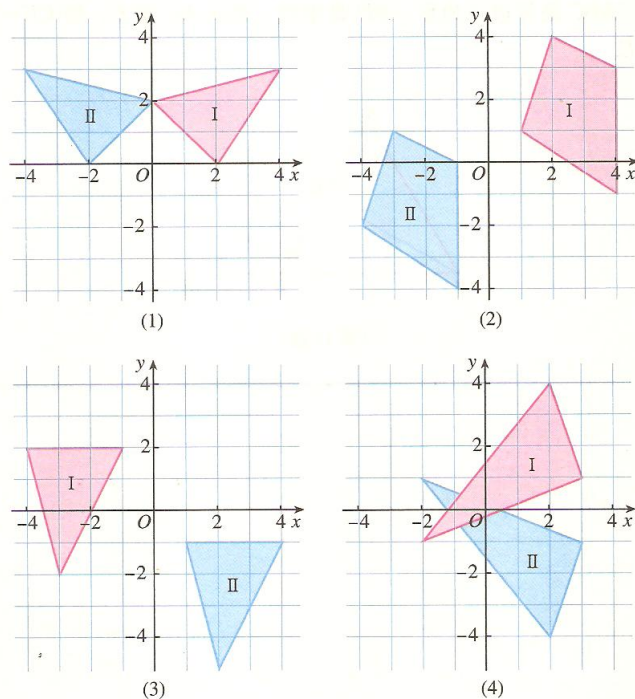
(第8题)

9. 如图, 图形 B 是图形 A 的轴对称图形吗? 如果是, 画出它们的对称轴; 如果不是, 试着画出图形 A 的一个轴对称图形.



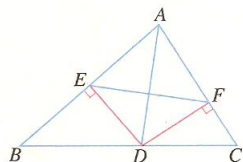
(第9题)

10. 如下页图, 从图形 I 到图形 II 是进行了平移还是轴对称? 如果是轴对称, 找出对称轴; 如果是平移, 是怎样的平移?

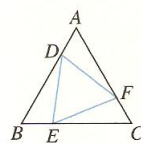


(第10题)

11. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, DE , DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高. 求证 AD 垂直平分 EF .



(第11题)



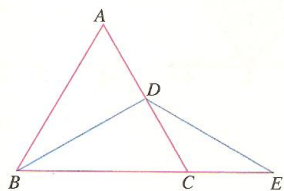
(第12题)

12. 如图, 在等边三角形 ABC 的三边上, 分别取点 D , E , F , 使 $AD=BE=CF$. 求证 $\triangle DEF$ 是等边三角形.

拓广探索

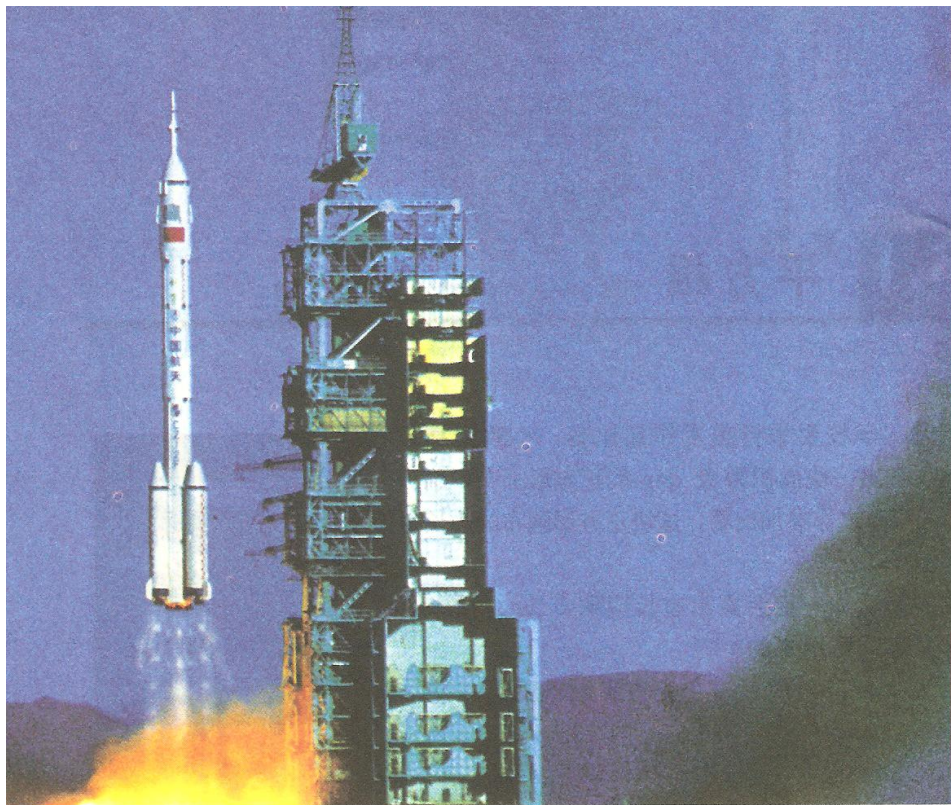
13. 在纸上画五个点, 使任意三个点组成的三角形都是等腰三角形, 这五个点应该怎样画?

14. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, BD 是中线, 延长 BC 至 E , 使 $CE=CD$. 求证 $DB=DE$.



(第 14 题)

第十三章 实数



第十三章

实数

同学们，你们知道宇宙飞船离开地球进入轨道正常运行的速度在什么范围吗？这时它的速度要大于第一宇宙速度 v_1 （单位： m/s ）而小于第二宇宙速度 v_2 （单位： m/s ）。 v_1, v_2 的大小满足 $v_1^2 = gR$ ， $v_2^2 = 2gR$ ，其中 g 是物理中的一个常数（重力加速度）， $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ， R 是地球半径， $R \approx 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 。怎样求 v_1, v_2 呢？这就要用到平方根的概念。

随着人类对数的认识的不断发展，人们从现实世界抽象出一种不同于有理数的数——无理数。有理数和无理数合起来形成一种新的数——实数。本章将从平方根与立方根等说起，学习有关实数的初步知识，并用这些知识解决一些实际问题。

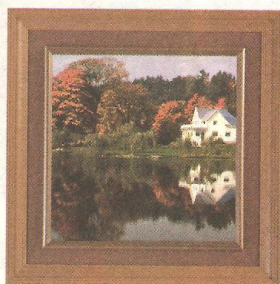
13.1 平方根

13.1 平方根

问题 学校要举行美术作品比赛，小鸥很高兴。他想裁出一块面积为 25 dm^2 的正方形画布，画上自己的得意之作参加比赛，这块正方形画布的边长应取多少？

很容易，你一定会算出边长应取 5 dm 。说一说，你是怎样算出来的？

因为 $5^2 = 25$ ，所以这个正方形画框的边长应取 5 dm 。



填表：

正方形的面积	1	9	16	36	$\frac{4}{25}$
边长					

上面的问题，实际上是已知一个正数的平方，求这个正数的问题。

一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a ，即 $x^2 = a$ ，那么这个正数 x 叫做 a 的**算术平方根** (arithmetic square root)。 a 的算术平方根记为 \sqrt{a} ，读作“根号 a ”， a 叫做**被开方数** (radicand)。

规定：0 的算术平方根是 0。

例 1 求下列各数的算术平方根：

- (1) 100; (2) $\frac{49}{64}$; (3) 0.000 1.

解：(1) 因为 $10^2 = 100$ ，所以 100 的算术平方根是 10，即 $\sqrt{100} = 10$ ；

(2) 因为 $\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$ ，所以 $\frac{49}{64}$ 的算术平方根是 $\frac{7}{8}$ ，即 $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$ ；

(3) 因为 $0.01^2 = 0.000\ 1$ ，所以 $0.000\ 1$ 的算术平方根是 0.01 ，即 $\sqrt{0.000\ 1} = 0.01$.

练习

1. 求下列各数的算术平方根：

- (1) $0.002\ 5$; (2) 121 ; (3) 3^2 .

2. 求下列各式的值：

- (1) $\sqrt{1}$; (2) $\sqrt{\frac{9}{25}}$; (3) $\sqrt{2^2}$.



怎样用两个面积为 1 的小正方形拼成一个面积为 2 的大正方形？

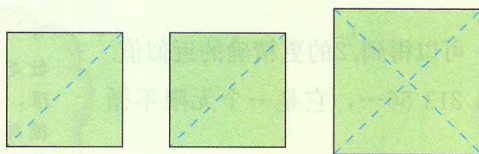


图 13.1-1

如图 13.1-1，把两个小正方形沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角形拼在一起，就得到一个面积为 2 的大正方形。你知道这个大正方形的边长是多少吗？

设大正方形的边长为 x ，则

$$x^2 = 2.$$

由算术平方根的意义可知

$$x = \sqrt{2},$$

所以大正方形的边长是 $\sqrt{2}$.

小正方形的对角线的长是多少呢？



$\sqrt{2}$ 有多大呢?

$$\begin{aligned} \because & 1^2=1, 2^2=4, \\ \therefore & 1<\sqrt{2}<2; \\ \because & 1.4^2=1.96, 1.5^2=2.25, \\ \therefore & 1.4<\sqrt{2}<1.5; \\ \because & 1.41^2=1.9881, 1.42^2=2.0164, \\ \therefore & 1.41<\sqrt{2}<1.42; \\ \because & 1.414^2=1.999396, 1.415^2=2.002225, \\ \therefore & 1.414<\sqrt{2}<1.415; \\ & \dots\dots \end{aligned}$$

如此进行下去,可以得到 $\sqrt{2}$ 的更精确的近似值.事实上, $\sqrt{2}=1.414\ 213\ 56\dots$,它是一个无限不循环小数.

实际上,许多正有理数的算术平方根(例如 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ 等)都是无限不循环小数.

无限不循环小数是指小数位数无限,且小数部分不循环的小数.你以前见过这种数吗?

大多数计算器都有 $\sqrt{\quad}$ 键,用它可以求出一个正有理数的算术平方根(或其近似值).

例2 用计算器求下列各式的值:

(1) $\sqrt{3\ 136}$; (2) $\sqrt{2}$ (精确到 0.001).

解: (1) 依次按键 $\sqrt{\quad}$ 3 136 $=$,

显示: 56.

$$\therefore \sqrt{3\ 136}=56.$$

不同品牌的计算器,按键顺序有所不同.

(2) 依次按键 $\sqrt{\quad}$ 2 $=$,

显示: 1.414 213 562.

$\therefore \sqrt{2} \approx 1.414$.

计算器上显示的 1.414 213 562 是 $\sqrt{2}$ 的近似值.

下面我们来看引言中提出的问题:

由 $v_1^2 = gR$, $v_2^2 = 2gR$, 得 $v_1 = \sqrt{gR}$, $v_2 = \sqrt{2gR}$, 其中 $g \approx 9.8$, $R \approx 6.4 \times 10^6$.

用计算器求 v_1 和 v_2 (用科学记数法把结果写成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 a 保留小数点后一位), 得

$$v_1 \approx \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} \approx 7.9 \times 10^3,$$

$$v_2 \approx \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \approx 1.1 \times 10^4.$$

因此, 第一宇宙速度 v_1 大约是 7.9×10^3 m/s, 第二宇宙速度 v_2 大约是 1.1×10^4 m/s.



(1) 利用计算器计算, 并将计算结果填在表中, 你发现了什么规律? 你能说出其中的道理吗?

...	$\sqrt{0.0625}$	$\sqrt{0.625}$	$\sqrt{6.25}$	$\sqrt{62.5}$	$\sqrt{625}$	$\sqrt{6250}$	$\sqrt{62500}$...
...								...

(2) 用计算器计算 $\sqrt{3}$ (精确到 0.001), 并利用你发现的规律说出 $\sqrt{0.03}$, $\sqrt{300}$, $\sqrt{30000}$ 的近似值, 你能根据 $\sqrt{3}$ 的值说出 $\sqrt{30}$ 是多少吗?

在生活中, 我们经常遇到估计一个数的大小的问题. 请看下面的例子.

例 3 小丽想用一块面积为 400 cm^2 的正方形纸片, 沿着边的方向裁出一块面积为 300 cm^2 的长方形纸片, 使它的长宽之比为 $3:2$. 不知



能否裁出来，正在发愁。小明见了说“别发愁，一定能用一块面积大的纸片裁出一块面积小的纸片”，你同意小明的说法吗？小丽能用这块纸片裁出符合要求的纸片吗？

解：设长方形纸片的长为 $3x$ cm，宽为 $2x$ cm.

根据边长与面积的关系得

$$3x \cdot 2x = 300,$$

$$6x^2 = 300,$$

$$x^2 = 50,$$

$$x = \sqrt{50}.$$

因此长方形纸片的长为 $3\sqrt{50}$ cm.

因为 $50 > 49$ ，所以 $\sqrt{50} > 7$.

由上可知 $3\sqrt{50} > 21$ ，即长方形纸片的长应该大于 21 cm.

已知正方形纸片的边长只有 20 cm，这样，长方形纸片的长将大于正方形纸片的边长.

答：不能同意小明的说法。小丽不能用这块正方形纸片裁出符合要求的长方形纸片.

$3\sqrt{50}$ 就是
 $3 \times \sqrt{50}$.

练习

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1\,369}$; (2) $\sqrt{101.203\,6}$; (3) $\sqrt{5}$ (精确到 0.01).

2. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{140}$ 与 12;

(2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 与 0.5.



思考

如果一个数的平方等于 9，这个数是多少？

从前面我们知道，这个数可以是 3。除了 3 以外，还有没有别的数的平方

也等于 9 呢?

由于 $(-3)^2=9$, 这个数也可以是一3.

因此, 如果一个数的平方等于 9, 那么这个数是 3 或 -3.

填表:

x^2	1	16	36	49	$\frac{4}{25}$
x					

一般地, 如果一个数的平方等于 a , 那么这个数叫做 a 的 **平方根** 或 **二次方根** (square root). 这就是说, 如果 $x^2=a$, 那么 x 叫做 a 的平方根.

例如, 3 和 -3 是 9 的平方根, 简记为 ± 3 是 9 的平方根.

求一个数 a 的平方根的运算, 叫做 **开平方** (extraction of square root).

我们看到, ± 3 的平方等于 9, 9 的平方根是 ± 3 , 所以平方与开平方互为逆运算 (图 13.1-2). 根据这种运算关系, 可以求一个数的平方根.

几千年前的
古埃及人就已经
知道了平方根.

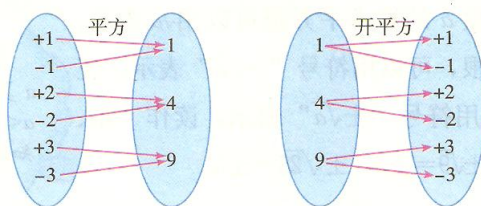


图 13.1-2

例 4 求下列各数的平方根:

- (1) 100; (2) $\frac{9}{16}$; (3) 0.25.

解: (1) 因为 $(\pm 10)^2=100$, 所以 100 的平方根是 ± 10 ;

(2) 因为 $(\pm \frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$, 所以 $\frac{9}{16}$ 的平方根是 $\pm \frac{3}{4}$;

(3) 因为 $(\pm 0.5)^2=0.25$, 所以 0.25 的平方根是 ± 0.5 .



正数的平方根有什么特点？0 的平方根是多少？负数有平方根吗？

从上面我们发现，正数的平方根有两个，它们互为相反数，其中正的平方根就是这个数的算术平方根.

因为 $0^2=0$ ，并且任何一个不为 0 的数的平方都不等于 0，所以 0 的平方根是 0.

正数的平方是正数，0 的平方是 0，负数的平方也是正数，即在我们所认识的数中，任何一个数的平方都不会是负数，所以负数没有平方根.



正数有_____个平方根，它们_____；

0 的平方根是_____；

负数_____.

我们知道，正数 a 的算术平方根可以用 \sqrt{a} 表示；
正数 a 的负的平方根，可以用符号 “ $-\sqrt{a}$ ” 表示，正
数 a 的平方根可以用符号 “ $\pm\sqrt{a}$ ” 表示，读作 “正、
负根号 a ”. 例如， $\pm\sqrt{9}=\pm 3$ ， $\pm\sqrt{25}=\pm 5$.

符号 \sqrt{a} 只有当
 $a \geq 0$ 时有意义，
 $a < 0$ 时无意义. 你
知道为什么吗？

例 5 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{144}$ ；(2) $-\sqrt{0.81}$ ；(3) $\pm\sqrt{\frac{121}{196}}$.

解：(1) 因为 $12^2=144$ ，所以 $\sqrt{144}=12$ ；

(2) 因为 $0.9^2=0.81$ ，所以 $-\sqrt{0.81}=-0.9$ ；

(3) 因为 $(\frac{11}{14})^2=\frac{121}{196}$ ，所以 $\pm\sqrt{\frac{121}{196}}=\pm\frac{11}{14}$.

知道一个数的
算术平方根，就可
以立即写出它的负
的平方根. 为什么？

练习

1. 填表:

x	8	-8	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$				
x^2					121		0.36	

2. 计算下列各式的值:

(1) $\sqrt{169}$; (2) $-\sqrt{0.0049}$; (3) $\pm\sqrt{\frac{64}{81}}$.

3. 平方根概念的起源与几何中的正方形有关. 如果一个正方形的面积为 A , 那么这个正方形的边长是多少?

习题13.1

复习巩固

1. 求下列各数的算术平方根:

(1) 196; (2) $\frac{25}{64}$; (3) 0.04; (4) 10^2 .

2. 下列各式是否有意义, 为什么?

(1) $-\sqrt{3}$; (2) $\sqrt{-3}$; (3) $\sqrt{(-3)^2}$; (4) $\sqrt{\frac{1}{10^2}}$.

3. 求下列各数的平方根:

(1) 225; (2) $\frac{1}{10^6}$; (3) $\frac{121}{144}$; (4) $\frac{9}{361}$.

4. 判断下列说法是否正确:

- (1) 5 是 25 的算术平方根;
 (2) $\frac{5}{6}$ 是 $\frac{25}{36}$ 的一个平方根;
 (3) $(-4)^2$ 的平方根是 -4;
 (4) 0 的平方根与算术平方根都是 0.

5. 用计算器计算下列各式的值 (精确到 0.01):

(1) $\sqrt{867}$; (2) $\sqrt{0.462\ 54}$; (3) $-\sqrt{\frac{8}{25}}$; (4) $\pm\sqrt{2\ 402}$.

6. 估计与 $\sqrt{40}$ 最接近的两个整数是多少.

综合运用

7. 根据下表回答下列问题:

x	16.0	16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.7	16.8	16.9	17.0
x^2	256.00	259.21	262.44	265.69	268.96	272.25	275.56	278.89	282.24	285.61	289.00

(1) 268.96 的平方根是多少?

(2) $\sqrt{285.6} \approx$ _____.

(3) $\sqrt{270}$ 在哪两个数之间? 为什么?

(4) 表中与 $\sqrt{260}$ 最接近的是哪个数?

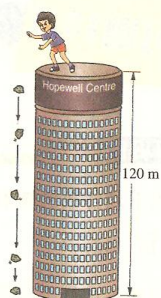
8. 求满足下列各式的 x 的值:

(1) $x^2=25$; (2) $x^2-81=0$;

(3) $25x^2=36$.

9. 自由下落物体的高度 h (单位: m) 与下落时间 t (单位: s) 的关系是 $h=4.9t^2$. 如图, 有一个物体从 120 m 高的建筑物上自由落下, 到达地面需要多长时间 (结果取整数)?

10. 一个正方形的面积扩大为原来的 4 倍, 它的边长变为原来的多少倍? 面积扩大为原来的 9 倍呢? n 倍呢?



(第 9 题)

拓广探索

11. (1) 求 $\sqrt{2^2}$, $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{5^2}$, $\sqrt{(-6)^2}$, $\sqrt{7^2}$, $\sqrt{0^2}$ 的值. 对于任意数 a , $\sqrt{a^2}$ 等于多少?

(2) 求 $(\sqrt{4})^2$, $(\sqrt{9})^2$, $(\sqrt{25})^2$, $(\sqrt{36})^2$, $(\sqrt{49})^2$, $(\sqrt{0})^2$ 的值. 对于任意非负数 a , $(\sqrt{a})^2$ 等于多少?

12. 任意找一个正数, 比如 1 234, 利用计算器对它进行开平方, 再对得到的平方根进行开平方……如此进行下去, 你有什么发现?

13.2 立方根

13.2 立方根

问题 要制作一种容积为 27 m^3 的正方体形状的包装箱，这种包装箱的边长应该是多少？

设这种包装箱的边长为 $x \text{ m}$ ，则

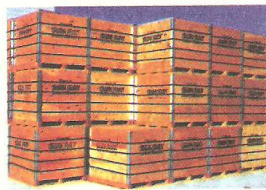
$$x^3 = 27.$$

这就是要求一个数，使它的立方等于 27.

因为 $3^3 = 27$,

所以 $x = 3$,

即这种包装箱的边长应为 3 m.



一般地，如果一个数的立方等于 a ，那么这个数叫做 a 的**立方根**或**三次方根** (cube root). 这就是说，如果 $x^3 = a$ ，那么 x 叫做 a 的立方根.

在上面的问题中，由于 $3^3 = 27$ ，所以 3 是 27 的立方根.

求一个数的立方根的运算，叫做**开立方** (extraction of cube root). 正如开平方与平方互为逆运算一样，开立方与立方也互为逆运算. 我们可以根据这种关系求一个数的立方根.



根据立方根的意义填空，看看正数、0 和负数的立方根各有什么特点？

因为 $2^3 = 8$ ，所以 8 的立方根是 ()；

因为 ()³ = 0.125，所以 0.125 的立方根是 ()；

因为 ()³ = 0，所以 0 的立方根是 ()；

因为 ()³ = -8，所以 -8 的立方根是 ()；

因为 ()³ = $-\frac{8}{27}$ ，所以 $-\frac{8}{27}$ 的立方根是 ().



正数的立方根是_____数，
 负数的立方根是_____数，
 0 的立方根是_____。

你能说说数的平方根与数的立方根有什么不同吗？

类似于平方根，一个数 a 的立方根，用符号“ $\sqrt[3]{a}$ ”表示，读作“三次根号 a ”，其中 a 是被开方数，3 是**根指数** (radical exponent)。例如， $\sqrt[3]{8}$ 表示 8 的立方根， $\sqrt[3]{8}=2$ ； $\sqrt[3]{-8}$ 表示 -8 的立方根， $\sqrt[3]{-8}=-2$ 。 $\sqrt[3]{a}$ 中的根指数 3 不能省略。

算术平方根的符号 \sqrt{a} ，实际上省略了 $\sqrt[2]{a}$ 中的根指数 2。因此， \sqrt{a} 也可读作“二次根号 a ”。



因为 $\sqrt[3]{-8}=\underline{\hspace{1cm}}$ ， $-\sqrt[3]{8}=\underline{\hspace{1cm}}$ ，所以 $\sqrt[3]{-8}\underline{\hspace{1cm}}-\sqrt[3]{8}$ ；
 因为 $\sqrt[3]{-27}=\underline{\hspace{1cm}}$ ， $-\sqrt[3]{27}=\underline{\hspace{1cm}}$ ，所以 $\sqrt[3]{-27}\underline{\hspace{1cm}}-\sqrt[3]{27}$ 。

一般地，

$$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}.$$

例 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{64}$ ； (2) $\sqrt[3]{-125}$ ； (3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$.

解：(1) $\sqrt[3]{64}=4$ ；

(2) $\sqrt[3]{-125}=-5$ ；

(3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=-\frac{3}{4}$.

实际上，很多有理数的立方根是无限不循环小数。例如 $\sqrt[3]{2}$ ， $\sqrt[3]{3}$ 等都是无限不循环小数。我们可以用有理数近似地表示它们。

一些计算器设有 $\sqrt[3]{}$ 键，用它可以求出一个数的立方根（或其近似值）。

例如，用计算器求 $\sqrt[3]{1\,845}$ ，可以按照下面的步骤进行：

依次按键 $\sqrt[3]{}$ 1 845 $=$ ，显示：12.264 940 82.

这样就得到 $\sqrt[3]{1\,845}$ 的近似值 12.264 940 82.

有些计算器需要用第二功能键求一个数的立方根. 例如用这种计算器求 $\sqrt[3]{1\,845}$ ，可以依次按键 2nd F $\sqrt[3]{}$ 1 845 $=$ ，显示：12.264 940 82.



用计算器计算 \dots , $\sqrt[3]{0.000\,216}$, $\sqrt[3]{0.216}$, $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[3]{216\,000}$, \dots ,
你能发现什么规律？用计算器计算 $\sqrt[3]{100}$ （精确到 0.001），并利用你发现的规律求 $\sqrt[3]{0.1}$, $\sqrt[3]{0.000\,1}$, $\sqrt[3]{100\,000}$ 的近似值.

练习

1. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{1\,000}$; (2) $\sqrt[3]{-0.001}$; (3) $\sqrt[3]{-1}$; (4) $-\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$.

2. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{1\,728}$; (2) $\sqrt[3]{15\,625}$; (3) $\pm\sqrt[3]{2\,197}$.

3. 比较 3, 4, $\sqrt[3]{50}$ 的大小.

4. 立方根概念的起源与几何中的正方体有关. 如果一个正方体的体积为 V , 这个正方体的棱长为多少?

习题13.2

复习巩固

1. 判断下列说法是否正确：

- (1) 5 是 125 的立方根；
- (2) ± 4 是 64 的立方根；
- (3) -2.5 是 -15.625 的立方根；
- (4) $(-4)^3$ 的立方根是 -4.

2. 填表：

x	4		6			9	
x^3		125		343	512		1 000

3. 下列各式是否有意义？为什么？

- (1) $-\sqrt[3]{3}$;
- (2) $\sqrt[3]{-3}$;
- (3) $\sqrt[3]{(-3)^3}$;
- (4) $\sqrt[3]{\frac{1}{10^3}}$.

4. 用计算器计算下列各式的值（精确到 0.001）：

- (1) $\sqrt[3]{868}$;
- (2) $\sqrt[3]{0.426\ 254}$;
- (3) $-\sqrt[3]{\frac{8}{25}}$;
- (4) $\pm \sqrt[3]{2\ 402}$.

综合运用

5. 求下列各式中 x 的值：

- (1) $x^3 = 0.008$;
- (2) $x^3 - 3 = \frac{3}{8}$;
- (3) $(x-1)^3 = 8$.

6. 一个正方体的体积扩大为原来的 8 倍，它的棱长变为原来的多少倍？扩大为原来的 27 倍呢？ n 倍呢？

7. 要生产一种容积为 50 升的圆柱形热水器，使它的高等于底面直径的 2 倍，这种容器的底面直径应取多少分米（用计算器计算，结果保留小数点后一位）？

8. 比较下列各组数的大小：

- (1) $\sqrt[3]{9}$ 与 2.5;
- (2) $\sqrt[3]{3}$ 与 $\frac{3}{2}$.



拓展探索

9. (1) 求 $\sqrt[3]{2^3}$, $\sqrt[3]{(-2)^3}$, $\sqrt[3]{(-3)^3}$, $\sqrt[3]{4^3}$, $\sqrt[3]{0^3}$ 的值. 对于任意数 a , $\sqrt[3]{a^3}$ 等于多少?

(2) 求 $(\sqrt[3]{8})^3$, $(\sqrt[3]{-8})^3$, $(\sqrt[3]{27})^3$, $(\sqrt[3]{-27})^3$, $(\sqrt[3]{0})^3$ 的值. 对于任意数 a , $(\sqrt[3]{a})^3$ 等于多少?

10. 任意找一个数, 比如 1 234, 利用科学计算器对它及每次所得结果不断进行立方根运算, 你有什么发现?

11. 我国数学家华罗庚在一次出国访问途中, 看到飞机上邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题, 求 59 319 的立方根. 华罗庚脱口而出: 39. 众人十分惊奇, 忙问计算的奥妙.

你知道怎样迅速准确地计算出结果的吗? 请按照下面的问题试一试:

(1) 由 $10^3=1\ 000$, $100^3=1\ 000\ 000$, 你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 是几位数吗?

(2) 由 59 319 的个位数是 9, 你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 的个位数是几吗?

(3) 如果划去 59 319 后面的三位 319 得到数 59, 而 $3^3=27$, $4^3=64$, 由此你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 的十位数是几吗?



华罗庚
1910—1985

13.3 实数

13.3 实数



使用计算器计算，把下列有理数写成小数的形式，你有什么发现？

$$3, -\frac{3}{5}, \frac{47}{8}, \frac{9}{11}, \frac{11}{90}, \frac{5}{9}.$$

我们发现，上面的有理数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式，即

$$\begin{aligned} 3 &= 3.0, & -\frac{3}{5} &= -0.6, & \frac{47}{8} &= 5.875, \\ \frac{9}{11} &= 0.\dot{8}\dot{1}, & \frac{11}{90} &= 0.1\dot{2}, & \frac{5}{9} &= 0.\dot{5}. \end{aligned}$$

事实上，任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式。反过来，任何有限小数或无限循环小数也都是有理数。

通过前两节的学习，我们知道，很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数，无限不循环小数又叫做**无理数** (irrational number)。例如 $\sqrt{2}$ ， $-\sqrt{5}$ ， $\sqrt[3]{2}$ ， $\sqrt[3]{3}$ 等都是无理数， $\pi=3.141\ 592\ 65\cdots$ 也是无理数。

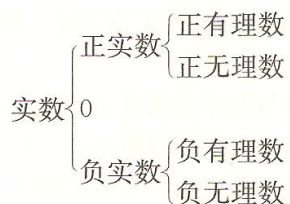
有理数和无理数统称**实数** (real number)。

这样，我们学过的数可以列成下表：

实数	有理数	有限小数或无限循环小数
	无理数	无限不循环小数

像有理数一样，无理数也有正负之分。例如 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt[3]{3}$ ， π 是正无理数， $-\sqrt{2}$ ， $-\sqrt[3]{3}$ ， $-\pi$ 是负无理数。由于非0有理数和无理数都有正负之分，所以

实数也可以这样分类：



我们知道，每个有理数都可以用数轴上的点来表示，无理数是否也可以用数轴上的点表示出来呢？



如图 13.3-1，直径为 1 个单位长度的圆从原点沿数轴向右滚动一周，圆上的一点由原点到达点 O' ，点 O' 的坐标是多少？

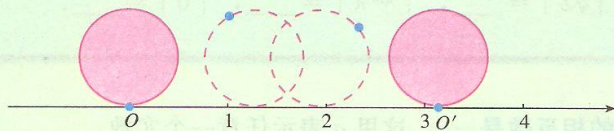


图 13.3-1

从图中可以看出， OO' 的长是这个圆的周长 π ，所以 O' 的坐标是 π 。

这样，无理数 π 可以用数轴上的点表示出来。

又如，以单位长度为边长画一个正方形（图 13.3-2），以原点为圆心，正方形对角线为半径画弧，与正半轴的交点就表示 $\sqrt{2}$ ，与负半轴的交点就表示 $-\sqrt{2}$ 。（为什么？）

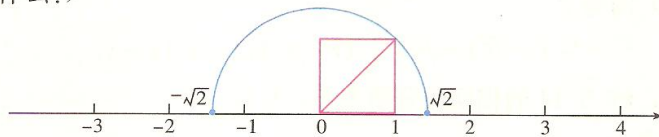


图 13.3-2

事实上，每一个无理数都可以用数轴上的一个点表示出来。这就是说，数轴上的点有些表示有理数，有些表示无理数。

当数从有理数扩充到实数以后,实数与数轴上的点就是一一对应的,即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示;反过来,数轴上的每一个点都表示一个实数.

平面直角坐标系中的点与有序实数对之间也是一一对应的.

与有理数一样,对于数轴上的任意两个点,右边的点所表示的实数总比左边的点表示的实数大.当数从有理数扩充到实数以后,有理数关于相反数和绝对值的意义同样适合于实数.

思考

$\sqrt{2}$ 的相反数是_____.

$-\pi$ 的相反数是_____.

0 的相反数是_____.

$|\sqrt{2}| = \underline{\hspace{1cm}}$, $|- \pi| = \underline{\hspace{1cm}}$, $|0| = \underline{\hspace{1cm}}$.

数 a 的相反数是 $-a$, 这里 a 表示任意一个实数.

一个正实数的绝对值是它本身; 一个负实数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0.

例 1 (1) 分别写出 $-\sqrt{6}$, $\pi-3.14$ 的相反数;

(2) 指出 $-\sqrt{5}$, $1-\sqrt[3]{3}$ 各是什么数的相反数;

(3) 求 $\sqrt[3]{-64}$ 的绝对值;

(4) 已知一个数的绝对值是 $\sqrt{3}$, 求这个数.

解: (1) 因为

$$-(-\sqrt{6}) = \sqrt{6}, \quad -(\pi-3.14) = 3.14-\pi,$$

所以, $-\sqrt{6}$, $\pi-3.14$ 的相反数分别为 $\sqrt{6}$, $3.14-\pi$.

(2) 因为

$$-(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}, \quad -(\sqrt[3]{3}-1) = 1-\sqrt[3]{3},$$

所以, $-\sqrt{5}$, $1-\sqrt[3]{3}$ 分别是 $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3}-1$ 的相反数.

(3) 因为

$$\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4,$$

所以

$$|\sqrt[3]{-64}| = |-4| = 4.$$

(4) 因为

$$|\sqrt{3}| = \sqrt{3}, \quad |-\sqrt{3}| = \sqrt{3},$$

所以绝对值为 $\sqrt{3}$ 的数是 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$.

当数从有理数扩充到实数以后, 实数之间不仅可以进行加、减、乘、除(除数不为0)、乘方运算, 而且正数及0可以进行开平方运算, 任意一个实数可以进行开立方运算. 在进行实数的运算时, 有理数的运算法则及运算性质等同样适用.

随着数的进一步扩充, 在比实数更大的数集——复数中, 负数将可以进行开平方运算.

例2 计算下列各式的值:

$$(1) (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{2}; \quad (2) 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}.$$

解: (1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{2}$

$$= \sqrt{3} + (\sqrt{2} - \sqrt{2})$$

(加法结合律)

$$= \sqrt{3} + 0 = \sqrt{3};$$

$$(2) \quad 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$= (3 + 2)\sqrt{3}$$

(分配律)

$$= 5\sqrt{3}.$$

在实数运算中, 当遇到无理数并且需要求出结果的近似值时, 可以按照所要求的精确度用相应的近似有限小数去代替无理数, 再进行计算.

例3 计算(结果保留小数点后两位):

$$(1) \sqrt{5} + \pi; \quad (2) \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}.$$

解: (1) $\sqrt{5} + \pi \approx 2.236 + 3.142 \approx 5.38;$

$$(2) \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \approx 1.732 \times 1.414 \approx 2.45.$$

练习

1. 请将数轴上的各点与下列实数对应起来：

$$\sqrt{2}, -1.5, \sqrt{5}, \pi, 3.$$



(第1题)

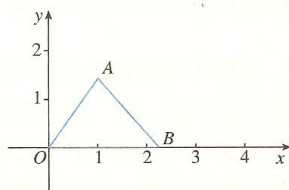
2. 求下列各数的相反数与绝对值：

$$2.5, -\sqrt{7}, -\frac{\pi}{2}, \sqrt{3}-2, 0.$$

3. 如图, A, B 两点的坐标分别是

$$A(1, \sqrt{2}), B(\sqrt{5}, 0),$$

求 $\triangle OAB$ 的面积(结果保留小数点后一位).



(第3题)

4. 计算：

$$(1) 2\sqrt{2}-3\sqrt{2}; \quad (2) |\sqrt{2}-\sqrt{3}|+2\sqrt{2}.$$

习题13.3

复习巩固

1. 判断下列说法是否正确：

- (1) 无限小数都是无理数；
- (2) 无理数都是无限小数；
- (3) 带根号的数都是无理数；
- (4) 所有的有理数都可以用数轴上的点表示，反过来，数轴上所有的点都表示有理数；
- (5) 所有的实数都可以用数轴上的点表示，反过来，数轴上所有的点都表示实数.

2. 把下列各数分别填在相应的集合中：

$$\frac{22}{7}, 3.141\ 592\ 65, \sqrt{7}, -8, \sqrt[3]{2}, 0.6, 0, \sqrt{36}, \frac{\pi}{3}.$$



有理数集合



无理数集合

3. 求下列各数的绝对值:

$$\sqrt[3]{-8}, \quad \sqrt{17}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \sqrt{3}-1.7, \quad 1.4-\sqrt{2}.$$

4. 用计算器计算 (结果保留小数点后两位):

$$(1) \sqrt{5}-\sqrt{3}+0.145;$$

$$(2) \sqrt[3]{6}-\pi-\sqrt{2}.$$

5. 计算:

$$(1) 3\sqrt{2}+2\sqrt{2};$$

$$(2) \sqrt[3]{3}-|-\sqrt[3]{3}|.$$

综合运用

6. 比较下列各组数的大小:

$$(1) 4, \sqrt{15};$$

$$(2) \pi, 3.141\ 6;$$

$$(3) \sqrt{3}-2, -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

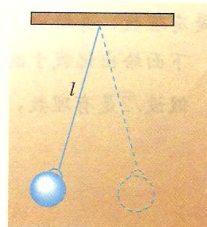
$$(4) \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

7. 有没有最小的正整数? 有没有最小的整数? 有没有最小的有理数? 有没有最小的无理数? 有没有最小的实数? 有没有绝对值最小的实数?

8. 如图, 一根细线上端固定, 下端系一个小重物, 让这个小重物来回自由摆动, 来回摆动一次所用的时间 t (单位: s)

与细线的长度 l (单位: m) 之间满足关系 $t=2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$. 当

细线的长度为 0.5 m 时, 小重物来回摆动一次所用的时间是多少 (结果保留小数点后一位)?



(第 8 题)

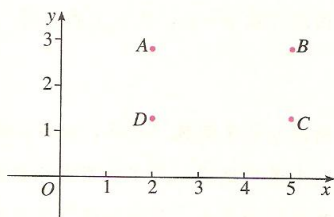
拓广探索

9. 如图, 平面内有四个点, 它们的坐标分别是 $A(2, 2\sqrt{2})$, $B(5, 2\sqrt{2})$, $C(5, \sqrt{2})$, $D(2, \sqrt{2})$.

(1) 依次连接点 A, B, C, D , 围成的四边形是一个什么图形?

(2) 求这个四边形的面积.

(3) 将这个四边形向下平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度, 四个顶点的坐标变为多少? 画出平移后的四边形.



(第 9 题)

阅读与思考 为什么说 $\sqrt{2}$ 不是有理数



阅读与思考

选学

为什么说 $\sqrt{2}$ 不是有理数

公元前6世纪古希腊的毕达哥拉斯学派有一种观点,即“万物皆数”,一切量都可以用整数或整数的比(分数)表示.后来,当这一学派中的希帕索斯(Hippasus)发现边长为1的正方形的对角线的长度不能用整数或整数的比表示,即 $\sqrt{2}$ 不是有理数时,毕达哥拉斯学派感到惊恐不安.由此,引发了第一次数学危机.

随着人们认识的不断深入,毕达哥拉斯学派逐渐承认 $\sqrt{2}$ 不是有理数,并给出了证明.

下面给出记载于欧几里得《原本》中的证明方法.

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数,那么存在两个互质的正整数 p, q ,使得

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

于是

$$p = \sqrt{2}q.$$

两边平方得

$$p^2 = 2q^2.$$

由 $2q^2$ 是偶数,可得 p^2 是偶数.而只有偶数的平方才是偶数,所以 p 也是偶数.因此可设 $p=2s$,代入上式,得

$$4s^2 = 2q^2,$$

即

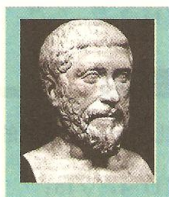
$$q^2 = 2s^2.$$

所以 q 也是偶数.这样, p 和 q 都是偶数,不互质,这与假设 p, q 互质矛盾.

这个矛盾说明, $\sqrt{2}$ 不能写成分数的形式,即 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

用类似的方法,你能证明 $\sqrt[3]{2}$ 不是有理数吗?

事实上,无理数只是一种命名,并非“无理”,而是实际存在的不能写成分数形式的数,它和有理数一样,都是现实世界中客观存在的量的反映.



毕达哥拉斯(Pythagoras, 约公元前580—前500年),古希腊数学家,毕达哥拉斯学派的主要代表人物.

数学活动



数学活动

活动 1

- (1) 画一个直角三角形，使它的两条直角边分别是 3 和 4.
- (2) 用直尺量出斜边的长.
- (3) 这三条边的平方之间有什么关系?



可以发现斜边的长等于 5，并且 $3^2 + 4^2 = 5^2$.

事实上，可以证明对于任意一个直角三角形，都有两条直角边的平方和等于斜边的平方.

请利用这个结论完成下面的活动.

- (4) 在数轴上作出表示无理数 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ... 的点.

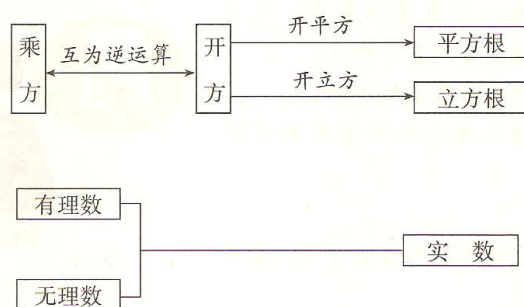
活动 2

1. 制作一个表面积为 12 dm^2 的正方体纸盒.
 - (1) 这个正方体的棱长是多少?
 - (2) 做出这个正方体纸盒.
2. 制作一个底面半径为 10 cm，高为 20 cm 的圆柱形纸盒.
 - (1) 圆柱的侧面展开图是什么形状?
 - (2) 这个侧面展开图的边长是多少?
 - (3) 做出这个圆柱形纸盒.

小 结

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 数的概念是怎样从正整数发展到实数的？随着数的不断扩充，数的运算有什么发展？
2. 回顾平方根与立方根的概念，乘方运算与开方运算有什么关系？
3. 无理数和有理数的区别是什么？
4. 实数由哪些数组成？实数与数轴上的点有什么关系？平面直角坐标系中的点与有序实数对有什么关系？

复习题 13

复习题13

复习巩固

1. 求下列各数的算术平方根及平方根:

(1) 2.25; (2) 289; (3) $\frac{144}{169}$; (4) 5^6 ; (5) $\left(-\frac{4}{13}\right)^2$; (6) 10^4 .

2. 求下列各数的立方根:

(1) $\frac{64}{125}$; (2) -0.008 ; (3) 512; (4) 3^6 .

3. 求下列各式的值:

(1) $-\sqrt{\frac{49}{169}}$; (2) $\sqrt[3]{-1}$; (3) $\sqrt{0.16}$; (4) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$.

4. 估计下列各数分别与哪一个整数最接近:

(1) $\sqrt{28}$; (2) $\sqrt{38}$; (3) $\sqrt[3]{99}$.

5. 用计算器求下列各式的值(精确到 0.001):

(1) $-\sqrt{94.3}$; (2) $\sqrt[3]{0.43}$;
(3) $\sqrt{55\ 225}$; (4) $\sqrt[3]{34\ 012\ 224}$.

6. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的平方根及立方根中, 哪些是有理数? 哪些是无理数?

7. 比较下列各组数的大小:

(1) $|-1.5|$, $1.\dot{5}$; (2) 1.414, $\sqrt{2}$;
(3) $\frac{2}{3}$, 0.666 67.

综合运用

8. 计算下列各式的值:

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)$; (2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9. 已知 $|x| < 2\pi$, x 是整数, 求 x .

10. 天气晴朗时, 一个人能看到大海的最远距离 s (单位: km) 可用公式 $s^2 = 16.88h$ 来估计, 其中 h (单位: m) 是眼睛离海平面的高度. 如果一个人站在岸边观察, 当

眼睛离海平面的高度是1.5 m时,能看到多远(精确到0.01 km)?如果登上一个观望台,当眼睛离海平面的高度是35 m时,能看到多远(精确到0.01 km)?

11. 一个圆与一个正方形的面积都是 $2\pi \text{ cm}^2$, 它们中哪一个的周长比较大? 你能从中得到什么启示?
12. 要生产一种容积为500升的球形容器, 这种球形容器的半径是多少分米(结果保留小数点后两位)? (球的体积公式是 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 其中 R 是球的半径)

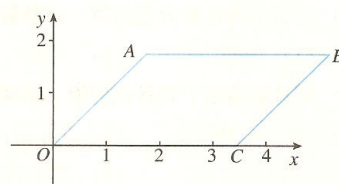
拓广探索

13. 填空:

- (1) 一个数的平方等于它本身, 这个数是_____; 一个数的平方根等于它本身, 这个数是_____; 一个数的算术平方根等于它本身, 这个数是_____;
- (2) 一个数的立方等于它本身, 这个数是_____; 一个数的立方根等于它本身, 这个数是_____.

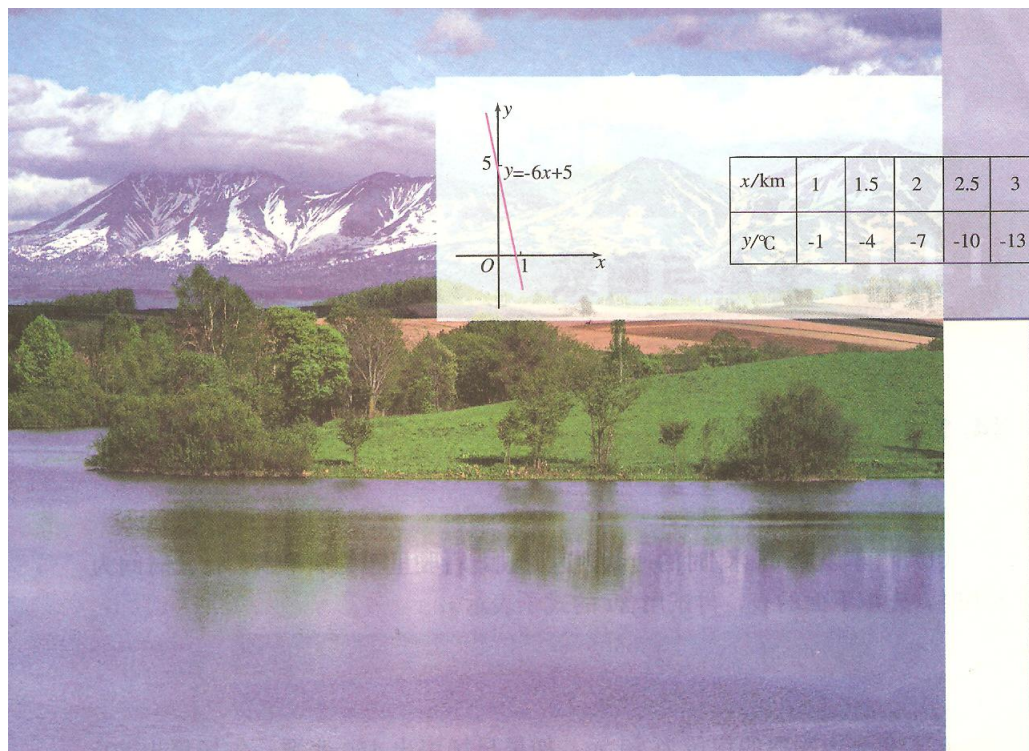
14. 如图, 在平行四边形 $OABC$ 中, 已知 A, C 两点的坐标分别为 $A(\sqrt{3}, \sqrt{3}), C(2\sqrt{3}, 0)$.

- (1) 求 B 点的坐标.
- (2) 将平行四边形 $OABC$ 向左平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度, 求所得四边形的四个顶点的坐标.
- (3) 求平行四边形 $OABC$ 的面积.



(第14题)

第十四章 一次函数



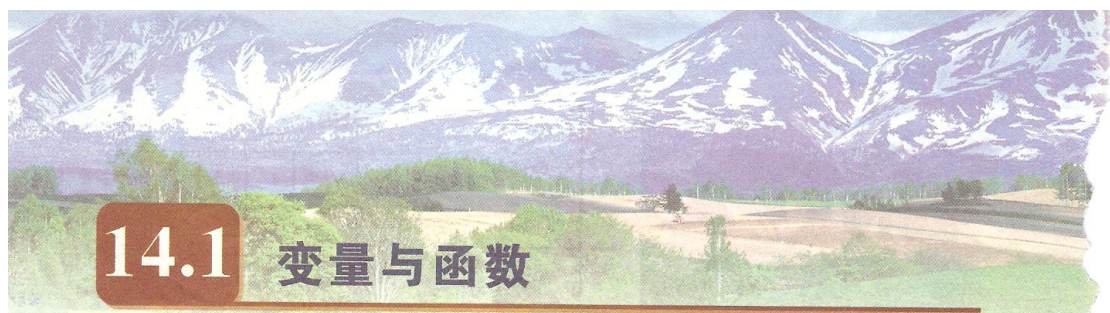
第十四章 一次函数

“万物皆变”——行星在宇宙中的位置随时间而变化；人体细胞的个数随年龄而变化；气温随海拔而变化；汽车行驶里程随行驶时间而变化……这种一个量随另一个量的变化而变化的现象大量存在。

为了更深刻地认识千变万化的世界，人们经归纳总结得出一个重要的数学工具——函数，用它描述变化中的数量关系。函数的应用极其广泛。

本章将通过具体问题引导你认识函数，并重点讨论一类最基本的函数——一次函数，然后用函数的观点再次认识方程（组）与不等式，最后的课题学习中利用函数讨论选择方案的问题。

14.1 变量与函数



14.1.1 变量

先请思考下面几个问题：

(1) 汽车以 60 千米/时的速度匀速行驶，行驶里程为 s 千米，行驶时间为 t 小时，先填下面的表，再试用含 t 的式子表示 s 。

t / 时	1	2	3	4	5
s / 千米					

(2) 每张电影票的售价为 10 元，如果早场售出 150 张票，午场售出 205 张票，晚场售出 310 张票，三场电影的票房收入各多少元？设一场电影售出 x 张票，票房收入为 y 元，怎样用含 x 的式子表示 y ？

(3) 在一根弹簧的下端悬挂重物，改变并记录重物的质量，观察并记录弹簧长度的变化，探索它们的变化规律。如果弹簧原长 10 cm，每 1 kg 重物使弹簧伸长 0.5 cm，设重物质量为 m kg，受力后的弹簧长度为 l cm，怎样用含 m 的式子表示 l ？

(4) 要画一个面积为 10 cm^2 的圆，圆的半径应取多少？圆面积为 20 cm^2 呢？怎样用含圆面积 S 的式子表示圆半径 r ？

(5) 如图 14.1-1，用 10 m 长的绳子围成长方形。试改变长方形的长度，观察长方形的面积怎样变化。记录不同的长方形的长度值，计算相应的长方形面积的值，探索它们的变化规律。设长方形的长为 x m，面积为 $S\text{ m}^2$ ，怎样用含 x 的式子表示 S ？

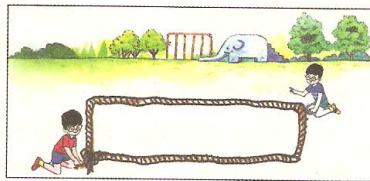


图 14.1-1

这些问题反映了不同的事物的变化过程，其中有些量（例如时间 t ，里程 s ；售出票数 x ，票房收入 y ……）的值是按照某种规律变化的。在一个变化过

程中,我们称数值发生变化的量为**变量** (variable). 有些量的数值是始终不变的,我们称它们为**常量** (constant). 例如上面问题中的速度 60 千米/时、票价 10 元……绳长 10 m 以及长方形的长宽之和 5 m, 都是常量.



具体指出上面的各问题中, 哪些量是变量, 哪些量是常量.

练习

举出一些变化的实例, 指出其中的常量与变量.

14.1.2 函数

14.1.1 的每个问题中是否各有两个变量? 同一个问题中的变量之间有什么联系?

在问题(1)中, 观察填出的表格, 你会发现: 每当行驶时间 t 取定一个值时, 行驶里程 s 就随之确定一个值, 例如 $t=1$, 则 $s=60$; $t=2$, 则 $s=120$ …… $t=5$, 则 $s=300$.

问题(2)中, 经计算可以发现: 每当售票数量 x 取定一个值时, 票房收入 y 就随之确定一个值, 例如早场 $x=150$, 则 $y=1\ 500$; 午场 $x=205$, 则 $y=2\ 050$; 晚场 $x=310$, 则 $y=3\ 100$.

问题(3)中, 通过试验可以看出: 每当重物质量 m 取定一个值时, 弹簧长度 l 就随之确定一个值. 如果弹簧原长 10 cm, 每 1 kg 重物使弹簧伸长 0.5 cm, 那么当 $m=1$ 时, $l=10.5$. 当 $m=10$ 时, l 等于多少?

问题(4)中, 你容易算出: 当 $S=10\text{ cm}^2$ 时, $r=\underline{\hspace{1cm}}\text{ cm}$; 当 $S=20\text{ cm}^2$ 时, $r=\underline{\hspace{1cm}}\text{ cm}$. 每当 S 取定一个值时, r 随之确定一个值. 你能得出: 两者的关系为 $r=\underline{\hspace{1cm}}$.

问题(5)中, 我们可以根据下表中给出的数值确定长方形一边的长, 得出另一边的长, 计算长方形的面积, 填表并探索变量间的关系.

一边长 x / m	4	3	2.5	2
另一边长 $(5-x) / \text{m}$	1	2	2.5	3
面积 S / m^2	4	6	6.25	6

每当长方形长 x 取定一个值时, 面积 S 就随之确定一个值,
 $S =$ _____.



上面每个问题中的两个变量互相联系, 当其中一个变量取定一个值时, 另一个变量就_____.

一些用图或表格表达的问题中, 也能看到两个变量间有上面那样的关系.



(1) 图 14.1-2 是体检时的心电图, 其中图上点的横坐标 x 表示时间, 纵坐标 y 表示心脏部位的生物电流, 它们是两个变量. 在心电图中, 对于 x 的每一个确定的值, y 都有唯一确定的对应值吗?



图 14.1-2

(2) 下面的我国人口数统计表中, 年份与人口数可以记作两个变量 x 与 y , 对于表中每一个确定的年份 (x), 都对应着一个确定的人口数 (y) 吗?

中国人口数统计表

年 份	人口数/亿
1984	10.34
1989	11.06
1994	11.76
1999	12.52

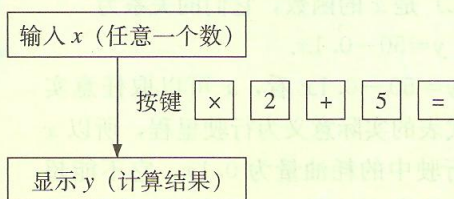
一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y ，并且对于 x 的每一个确定的值， y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是**自变量** (independent variable)， y 是 x 的**函数** (function)。如果当 $x=a$ 时 $y=b$ ，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的**函数值**。

可以认为：前面问题 (1) 中，时间 t 是自变量，里程 s 是 t 的函数， $t=1$ 时的函数值 $s=60$ ， $t=2$ 时的函数值 $s=120$ ， $t=2.5$ 时的函数值 $s=$ ____。……
同样地，在心电图中，时间 x 是自变量，心脏电流 y 是 x 的函数；人口数统计表中，年份 x 是自变量，人口数 y 是 x 的函数，当 $x=1999$ 时，函数值 $y=$ _____。

从上面可知，许多问题中的变量之间都存在函数关系。



(1) 在计算器上按照下面的程序进行操作：

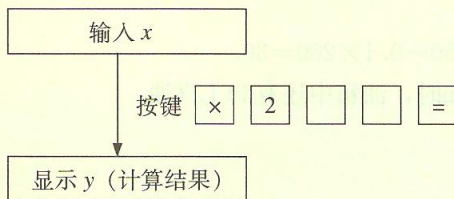


填表

x	1	3	-4	0	101
y					

显示的数 y 是输入的数 x 的函数吗？为什么？

(2) 在计算器上按照下面的程序进行操作：



下表中的 x 与 y 是输入的 5 个数与相应的计算结果。

x	1	2	3	0	-1
y	3	5	7	1	-1

所按的第三、四两个键是哪两个键？ y 是 x 的函数吗？如果是，写出它的表达式（用含 x 的式子表示 y ）.

例 1 一辆汽车的油箱中现有汽油 50 L，如果不再加油，那么油箱中的油量 y (单位：L) 随行驶里程 x (单位：km) 的增加而减少，平均耗油量为 0.1 L/km.

(1) 写出表示 y 与 x 的函数关系的式子，这样的式子叫做函数解析式.

(2) 指出自变量 x 的取值范围.

(3) 汽车行驶 200 km 时，油箱中还有多少汽油？

解：(1) 行驶里程 x (单位：km) 是自变量，油箱中的油量 y (单位：L) 是 x 的函数，它们的关系为

$$y = 50 - 0.1x.$$

(2) 仅从式子 $y = 50 - 0.1x$ 看， x 可以取任意实数，但是考虑到 x 代表的实际意义为行驶里程，所以 x 不能取负数，并且行驶中的耗油量为 $0.1x$ ，它不能超过油箱中现有汽油量的值 50，即

$$0.1x \leq 50.$$

因此，自变量 x 的取值范围是

$$0 \leq x \leq 500.$$

(3) 汽车行驶 200 km 时，油箱中的汽油量是函数 $y = 50 - 0.1x$ 在 $x = 200$ 时的函数值. 将 $x = 200$ 代入 $y = 50 - 0.1x$ ，得

$$y = 50 - 0.1 \times 200 = 30.$$

汽车行驶 200 km 时，油箱中还有 30 L 汽油.

0.1x 表示什么意思？

确定自变量的取值范围时，不仅要考虑函数关系式有意义，而且还要注意问题的实际意义.

练习

下列问题中哪些量是自变量？哪些量是自变量的函数？试写出用自变量表示函数的式子。

- (1) 改变正方形的边长 x ，正方形的面积 S 随之改变。
- (2) 秀水村的耕地面积是 10^6 m^2 ，这个村人均占有耕地面积 y 随这个村人数 n 的变化而变化。

14.1.3 函数的图象

有些问题中的函数关系很难列式子表示，但是可以用图来直观地反映，例如用心电图表示心脏生物电流与时间的关系。即使对于能列式表示的函数关系，如也能画图表示则会使函数关系更清晰。

正方形的边长 x 与面积 S 的函数关系为 $S=x^2$ ，其中自变量 x 的取值范围是 $x>0$ 。我们还可以利用在坐标系中画图的方法来表示 S 与 x 的关系。

自变量 x 的一个确定的值与它所对应的唯一的函数值 S ，是否确定了一个点 (x, S) 呢？

计算并填写下表：

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
S									

你能解释 $x>0$ 这个范围是怎样确定的吗？

如图 14.1-3，在直角坐标系中，将上面表格中各对数值所对应的点画出，然后连接这些点，所得曲线上每一个点都代表 x 的值与 S 的值的一种对应，例如点 $(2, 4)$ 表示 $x=2$ 时， $S=4$ 。

表示 x 与 S 的对应关系的点有无数个。但是实际上我们只能描出其中有限个点，同时想象出其他点的位置。

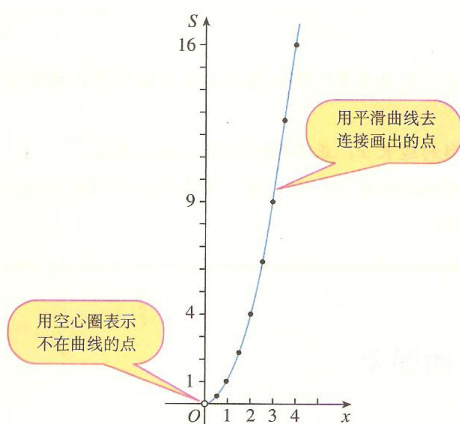


图 14.1-3

一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的**图象** (graph). 图 14.1-3 的曲线即函数

$$S=x^2 \quad (x>0)$$

的图象.

通过图象可以数形结合地研究函数.

思考

图 14.1-4 是自动测温仪记录的图象，它反映了北京的春季某天气温 T 如何随时间 t 的变化而变化. 你从图象中得到了哪些信息？

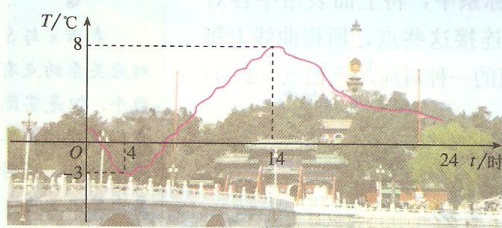


图 14.1-4

如有条件，你可以用带有温度探头的计算机(器)，测试、记录温度和绘制表示温度变化的图象.

可以认为, 气温 T 是时间 t 的函数, 图 14.1-4 是这个函数的图象. 由图象可知:

- (1) 这一天中凌晨 4 时气温最低 (-3°C), 14 时气温最高 (8°C);
- (2) 从 0 时至 4 时气温呈下降状态 (即温度随时间的增长而下降), 从 4 时到 14 时气温呈上升状态, 从 14 时至 24 时气温又呈下降状态;
- (3) 我们可以从图象中看出这一天中任一时刻的气温大约是多少;
- (4) 如果长期观察这样的气温图象, 我们就能得到更多信息, 掌握更多气温的变化规律.

例 2 下面的图象 (图 14.1-5) 反映的过程是: 小明从家去菜地浇水, 又去玉米地锄草, 然后回家. 其中 x 表示时间, y 表示小明离他家的距离, 小明家、菜地、玉米地在同一条直线上.

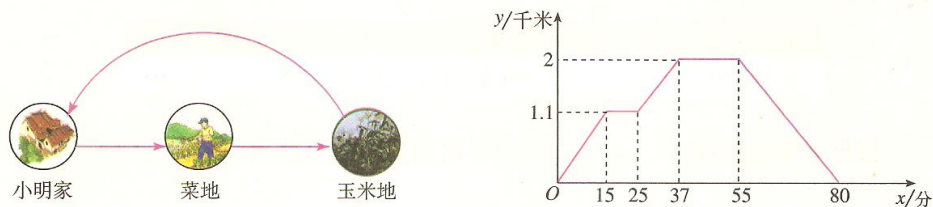


图 14.1-5

根据图象回答下列问题:

- (1) 菜地离小明家多远? 小明从家到菜地用了多少时间?
- (2) 小明给菜地浇水用了多少时间?
- (3) 菜地离玉米地多远? 小明从菜地到玉米地用了多少时间?
- (4) 小明给玉米地锄草用了多少时间?
- (5) 玉米地离小明家多远? 小明从玉米地回家的平均速度是多少?

分析: 小明离家的距离 y 是时间 x 的函数, 从图象中有两段是平行于 x 轴的线段可知, 小明离家后有两段时间内先后停留在菜地与玉米地.

解: (1) 由纵坐标看出, 菜地离小明家 1.1 千米; 由横坐标看出, 小明从家到菜地用了 15 分.

(2) 由横坐标看出, 小明给菜地浇水用了 10 (即 $25-15$) 分.

(3) 由纵坐标看出, 菜地离玉米地 0.9 (即 $2-1.1$) 千米; 由横坐标看出, 小明从菜地到玉米地用了 12 (即 $37-25$) 分.

(4) 由横坐标看出, 小明给玉米地锄草用了 18(即 $55-37$) 分.

(5) 由纵坐标看出, 玉米地离小明家 2 千米; 由横坐标看出, 小明从玉米地回家用了 25(即 $80-55$) 分, 由此算出平均速度是 0.08 千米/分.

例 3 在下列式子中, 对于 x 的每一确定的值, y 有唯一的对应值, 即 y 是 x 的函数, 画出这些函数的图象:

(1) $y=x+0.5$; (2) $y=\frac{6}{x} (x>0)$.

解: (1) $y=x+0.5$.

从上式可以看出, x 取任意实数时这个式子都有意义, 所以 x 的取值范围是全体实数.

从 x 的取值范围中选取一些数值, 算出 y 的对应值, 列表 (计算并填写表中空格):

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...			-0.5	0.5	1.5	2.5		...

根据表中数值描点 (x, y) , 并用平滑曲线连接这些点 (图 14.1-6).

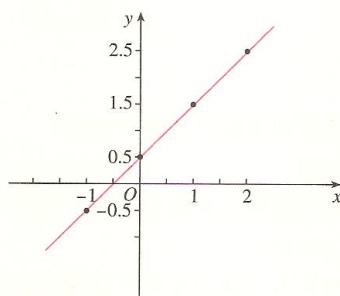
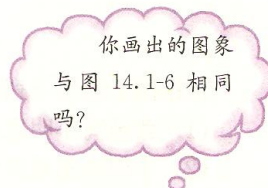


图 14.1-6



从函数图象可以看出, 直线从左向右上升, 即当 x 由小变大时, $y=x+0.5$ 随之增大.

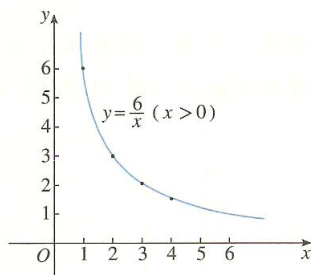
(2) $y=\frac{6}{x} (x>0)$.

列表 (计算并填写表中空格):

自变量的取值不能使函数解析式的分母为 0.

x	...	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6	...
y	...		6		3		2		1.5			...

根据表中数值描点 (x, y) ，并用平滑曲线连接这些点 (图 14.1-7).



你画出的图象
与图 14.1-7 相同
吗?

图 14.1-7

从函数图象可以看出，曲线从左向右下降，即当 x 由小变大时， $y = \frac{6}{x}$ 随之减小.

归纳

描点法画函数图象的一般步骤如下：

第一步：列表（表中给出一些自变量的值及其对应的函数值）；

第二步：描点（在直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点）；

第三步：连线（按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用平滑曲线连接起来）.

思考

(1) 图 14.1-8 是一种古代计时器——“漏壶”的示意图，在壶内盛一定量的水，水从壶下的小孔漏出，壶壁内画出刻度，人们根据壶中水面的位置计算时间. 用 x 表示时间， y 表示壶底到水面的高度，下面的哪个图象适合表示一小段时间内 y 与 x 的函数关系（暂不考虑水量变化对压力的影响）？

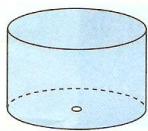
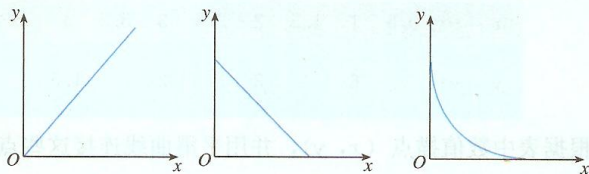


图 14.1-8



(2) a 是自变量 x 取值范围内的任意一个值, 过点 $(a, 0)$ 画 y 轴的平行线, 与图中曲线相交. 下列哪个图中的曲线 (图 14.1-9) 表示 y 是 x 的函数? 为什么?

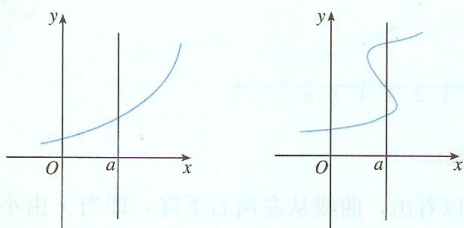


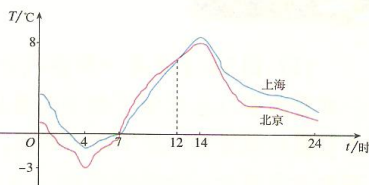
图 14.1-9

(提示: 当 $x=a$ 时, x 的函数 y 只能有一个函数值)

练习

- 画出函数 $y=2x-1$ 的图象;
 - 判断点 $A(-2.5, -4)$, $B(1, 3)$, $C(2.5, 4)$ 是否在函数 $y=2x-1$ 的图象上.
- 下图是北京与上海在某一天的气温随时间变化的图象.

 - 这一天, 上海与北京何时温度相同?
 - 这一天, 上海在哪段时间比北京温度高? 在哪段时间比北京温度低?
- 画出函数 $y=x^2$ 的图象.
 - 从图象中观察, 当 $x<0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 还是 y 随 x 的增大而减小? 当 $x>0$ 时呢?



(第 2 题)

我们已经看到或亲自动手用列表格、写式子和画图象的方法表示了一些函数，这三种表示函数的方法分别称为列表法、解析式法和图象法。



从前面的例子看，你认为三种表示函数的方法各有什么优点？

表示函数时，要根据具体情况选择适当的方法，有时为全面地认识问题，需要同时使用几种方法。

例 4 一水库的水位在最近 5 小时内持续上涨，下表记录了这 5 小时的水位高度。

t / 时	0	1	2	3	4	5
y / 米	10	10.05	10.10	10.15	10.20	10.25

(1) 由记录表推出这 5 小时中水位高度 y (单位:米) 随时间 t (单位:时) 变化的函数解析式，并画出函数图象；

(2) 据估计按这种上涨规律还会持续上涨 2 小时，预测再过 2 小时水位高度将达到多少米。

分析：记录表已经通过 6 组数值反映了时间 t 与水位 y 之间的对应关系，我们现在需要从这些数值找出这两个变量之间的一般联系规律，由它写出函数解析式，画出函数图象，进而预测水位。

解：(1) 由表中观察到开始水位高 10 米，以后每隔 1 小时，水位升高 0.05 米，这样的变化规律可以表示为

$$y = 0.05t + 10 \quad (0 \leq t \leq 5).$$

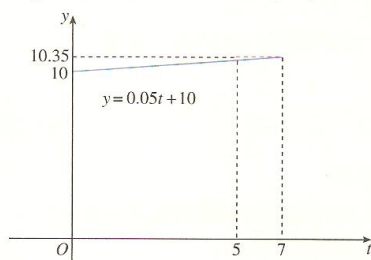


图 14.1-10

这个函数的图象是图 14.1-10 中 $0 \leq t \leq 5$ 所对应的蓝色线段.

(2) 再过 2 小时的水位高度, 就是 $t=5+2=7$ 时 $y=0.05t+10$ 的函数值, 从解析式容易算出

$$y=0.05 \times 7 + 10 = 10.35.$$

把函数图象向右延伸到 $t=7$ 所对应的位置, 也能估出这个值.

2 小时后, 预计水位高 10.35 米.

由例 4 可以看出, 函数的不同表示法之间可以转化.

练习

1. 用列表法与解析式法表示 n 边形的内角和 m (单位: 度) 是边数 n 的函数.
2. 用解析式法与图象法表示等边三角形的周长 l 是边长 a 的函数.

习题 14.1

复习巩固

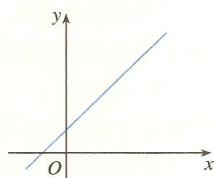
1. 购买一些铅笔, 单价为 0.2 元/枝, 总价 y 元随铅笔枝数 x 变化, 指出其中的常量与变量, 自变量与函数, 并写出函数解析式.
2. 一个三角形的底边长为 5, 高 h 可以任意伸缩, 写出面积 S 随 h 变化的解析式, 并指出其中的常量与变量, 自变量与函数, 以及自变量的取值范围.
3. 下列式子中的 y 是 x 的函数吗? 为什么? 请再举出一些函数的例子.

(1) $y=3x-5$; (2) $y=\frac{x-2}{x-1}$; (3) $y=\sqrt{x-1}$.

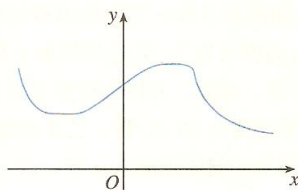
4. 分别对第 3 题的各式讨论:
(1) 自变量 x 在什么范围内取值时函数解析式有意义?
(2) 当 $x=5$ 时对应的函数值是多少?
5. 画出函数 $y=0.5x$ 的图象, 指出自变量及其取值范围.



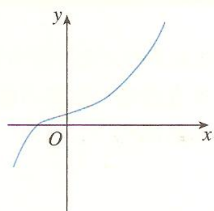
6. 下列各曲线中哪些表示 y 是 x 的函数?



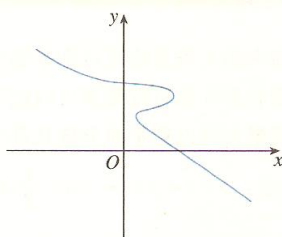
(1)



(2)



(3)

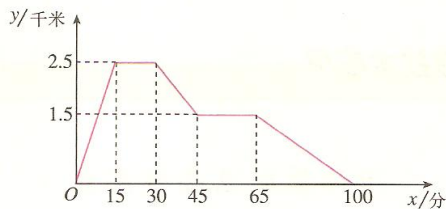


(4)

(第 6 题)

综合运用

7. 下面的图象反映的过程是：张强从家跑步去体育场，在那里锻炼了一阵后又走到文具店去买笔，然后散步走回家。其中 x 表示时间， y 表示张强离家的距离。



(第 7 题)

根据图象回答下列问题：

- (1) 体育场离张强家多远？张强从家到体育场用了多少时间？
- (2) 体育场离文具店多远？
- (3) 张强在文具店停留了多少时间？
- (4) 张强从文具店回家的平均速度是多少？

信息技术应用 用计算机画函数图像

8. 某种活期储蓄的月利率是 0.06% ，存入 100 元本金，求本息和（本金与利息的和） y 元随所存月数 x 变化的函数解析式，并计算存期为 4 个月时的本息和.
9. 正方形边长为 3 ，若边长增加 x 则面积增加 y ，求 y 随 x 变化的函数解析式，指出自变量、函数，并以表格形式表示当 x 等于 $1, 2, 3, 4$ 时 y 的值.
10. 甲车速度为 20 米/秒，乙车速度为 25 米/秒. 现甲车在乙车前面 500 米，设 x 秒后两车之间的距离为 y 米，求 y 随 x ($0 \leq x \leq 100$) 变化的函数解析式，并画出函数图象.

拓广探索

11. 平面内的 1 条直线可以把平面分成 2 部分， 2 条直线最多可以把平面分成 4 部分，画图看看 3 条直线最多可以把平面分成几部分， 4 条直线呢？你能不能想出 n 条直线最多可以把平面分成几部分？所得结果是 n 的函数吗？
(提示： $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$)
12. 在同一直角坐标系中分别画出函数 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的图象，试用这两个图象说明何时 x 比 $\frac{1}{x}$ 大，何时 x 比 $\frac{1}{x}$ 小.



信息技术应用

选学

用计算机画函数图象

由解析式画函数图象时，一般采用描点连线法，描出的点越多，画出的函数图象越准确. 但是，仅靠手工操作有时很难画出准确的图象. 计算机可以帮助我们又快又准地画函数图象，下面介绍用“几何画板”软件画函数图象的一些例子.

例 1 画函数 $y=3x-2$ 的图象.

“几何画板”软件具有绘制函数图象的功能 (new function / graph)，启用这个功能，

输入函数 $y=3x-2$ 的解析式，计算机便自动画出如下图象（图 1 中的直线）。

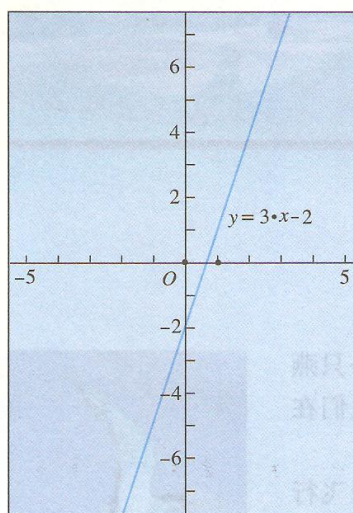


图 1

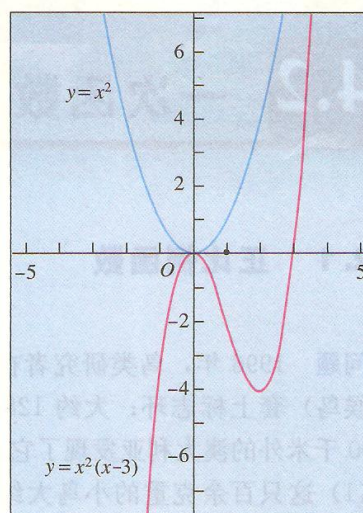


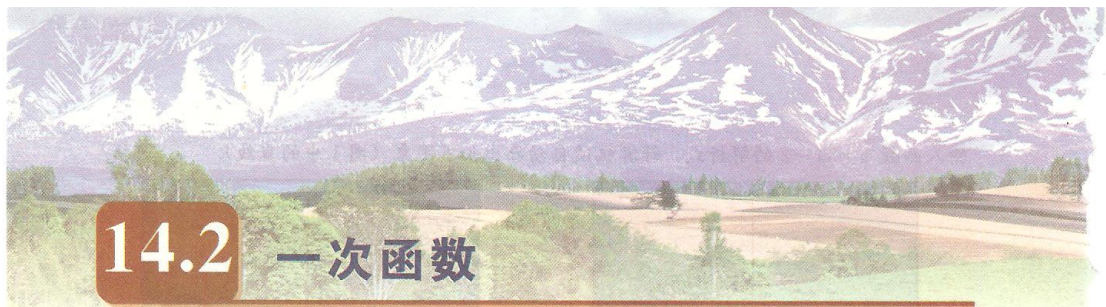
图 2

例 2 画函数 $y=x^2$ 与 $y=x^2(x-3)$ 的图象（图 2 中蓝色的曲线与红色的曲线）。从画出的函数图象可以看出，函数图象与函数性质之间存在着必然的联系。例如

图象特征		函数变化规律
由左至右曲线呈上升状态	\Leftrightarrow	y 随 x 的增大而增大
由左至右曲线呈下降状态	\Leftrightarrow	y 随 x 的增大而减小
曲线上的最高点是 (a, b)	\Leftrightarrow	$x=a$ 时， y 有最大值 b
曲线上的最低点是 (a, b)	\Leftrightarrow	$x=a$ 时， y 有最小值 b

根据上面例子中的函数图象，你发现这些函数各具有什么性质？

14.2 一次函数



14.2.1 正比例函数

问题 1996年,鸟类研究者在芬兰给一只燕鸥(候鸟)套上标志环;大约128天后,人们在25 600千米外的澳大利亚发现了它.



(1) 这只百余克重的小鸟大约平均每天飞行多少千米?

(2) 这只燕鸥的行程 y (单位:千米) 与飞行时间 x (单位:天) 之间有什么关系?

(3) 这只燕鸥飞行一个半月(一个月按30天计算)的行程大约是多少千米?

分析: (1) 这只燕鸥大约平均每天飞行的路程为

$$25\,600 \div 128 = 200 \text{ (千米)}.$$

(2) 假设这只燕鸥每天飞行的路程为200千米,那么它的行程 y (单位:千米) 就是飞行时间 x (单位:天) 的函数,函数解析式为

$$y = 200x \quad (0 \leq x \leq 128).$$

(3) 这只燕鸥飞行一个半月的行程,大约是 $x=45$ 时函数 $y=200x$ 的值,即

$$y = 200 \times 45 = 9\,000 \text{ (千米)}.$$

以上我们用函数 $y=200x$ 对燕鸥的飞行路程问题进行了刻画,尽管这只是近似的,但它可以作为反映燕鸥的行程与时间的对应规律的一个模型.

思考

下列问题中的变量对应规律可用怎样的函数表示？这些函数有什么共同点？

- (1) 圆的周长 l 随半径 r 的大小变化而变化；
- (2) 铁的密度为 7.8 g/cm^3 ，铁块的质量 m (单位：g) 随它的体积 V (单位： cm^3) 的大小变化而变化；
- (3) 每个练习本的厚度为 0.5 cm ，一些练习本摞在一起的总厚度 h (单位：cm) 随这些练习本的本数 n 的变化而变化；
- (4) 冷冻一个 0°C 的物体，使它每分下降 2°C ，物体的温度 T (单位： $^\circ\text{C}$) 随冷冻时间 t (单位：分) 的变化而变化。

可以得出上面问题中的函数分别为：

- (1) $l=2\pi r$;
- (2) $m=7.8V$;
- (3) $h=0.5n$;
- (4) $T=-2t$.

归纳

正如函数 $y=200x$ 一样，上面这些函数都是常数与自变量的乘积的形式。

一般地，形如 $y=kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的函数，叫做**正比例函数** (proportional function)，其中 k 叫做比例系数。

例 1 画出下列正比例函数的图象：

- (1) $y=2x$;
- (2) $y=-2x$.

解：(1) 函数 $y=2x$ 中自变量 x 可以是任意实数，列表表示几组对应值 (填空)：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

画出函数 $y=2x$ 的图象。

你画出的图象与图 14.2-1 相同吗?

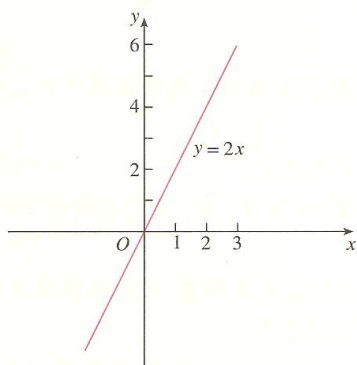


图 14.2-1

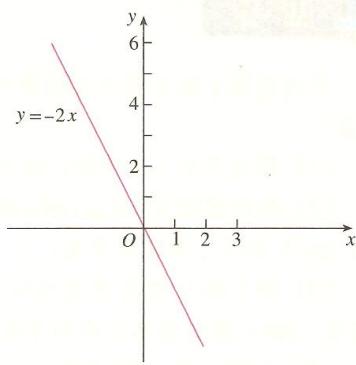


图 14.2-2

(2) 请你独立地画出函数 $y = -2x$ 的图象.

你画出的图象与图 14.2-2 相同吗?

比较上面两个函数的图象的相同点与不同点, 考虑两个函数的变化规律. 填写你发现的规律:

两图象都是经过原点的____. 函数 $y = 2x$ 的图象从左向右____, 经过第____象限; 函数 $y = -2x$ 的图象从左向右____, 经过第____象限.

练习

在同一坐标系中, 画出下列函数的图象, 并对它们进行比较:

(1) $y = \frac{1}{2}x$; (2) $y = -\frac{1}{2}x$.

一般地, 正比例函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象是一条经过原点的直线, 我们称它为直线 $y = kx$. 当 $k > 0$ 时, 直线 $y = kx$ 经过第三、一象限, 从左向右上升, 即随着 x 的增大 y 也增大; 当 $k < 0$ 时, 直线 $y = kx$ 经过第二、四象限, 从左向右下降, 即随着 x 的增大 y 反而减小.

思考

经过原点与点 $(1, k)$ 的直线是哪个函数的图象？画正比例函数的图象时，怎样画最简单？为什么？

练习

用你认为最简单的方法画出下列函数的图象：

(1) $y = \frac{3}{2}x$; (2) $y = -3x$.

14.2.2 一次函数

问题 某登山队大本营所在地的气温为 5°C ，海拔每升高 1 km 气温下降 6°C ，登山队员由大本营向上登高 $x\text{ km}$ 时，他们所在位置的气温是 $y^{\circ}\text{C}$ ，试用解析式表示 y 与 x 的关系。

分析： y 随 x 变化的规律是，从大本营向上当海拔增加 $x\text{ km}$ 时，气温从 5°C 减少 $6x^{\circ}\text{C}$ 。因此 y 与 x 的函数关系为

$$y = 5 - 6x.$$

这个函数也可以写为

$$y = -6x + 5.$$

当登山队员由大本营向上登高 0.5 km 时，他们所在位置的气温就是 $x = 0.5$ 时函数 $y = -6x + 5$ 的值，即 $y = -6 \times 0.5 + 5 = 2(^{\circ}\text{C})$ 。



思考

下列问题中变量间的对应关系可用怎样的函数表示？这些函数有什么共同点？

(1) 有人发现, 在 $20\sim 25\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时蟋蟀每分鸣叫次数 c 与温度 t (单位: $^{\circ}\text{C}$) 有关, 即 c 的值约是 t 的 7 倍与 35 的差;

(2) 一种计算成年人标准体重 G (单位: 千克) 的方法是, 以厘米为单位量出身高值 h , 再减常数 105, 所得差是 G 的值;

(3) 某城市的市内电话的月收费额 y (单位: 元) 包括: 月租费 22 元, 拨打电话 x 分的计时费 (按 0.1 元/分收取);

(4) 把一个长 10 cm、宽 5 cm 的长方形的长减少 x cm, 宽不变, 长方形的面积 y (单位: cm^2) 随 x 的值而变化.

可以得出上面问题中的函数解析式分别为:

- (1) $c=7t-35$; (2) $G=h-105$;
(3) $y=0.1x+22$; (4) $y=-5x+50$.

归纳

正如函数 $y=-6x+5$ 一样, 上面这些函数的形式都是自变量 x 的 k (常数) 倍与一个常数的和.

一般地, 形如 $y=kx+b$ (k, b 是常数, $k\neq 0$) 的函数, 叫做**一次函数** (linear function). 当 $b=0$ 时, $y=kx+b$ 即 $y=kx$, 所以说正比例函数是一种特殊的一次函数.

练习

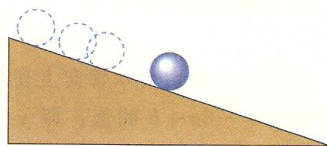
1. 下列函数中哪些是一次函数, 哪些又是正比例函数?

- (1) $y=-8x$; (2) $y=\frac{-8}{x}$; (3) $y=5x^2+6$; (4) $y=-0.5x-1$.

2. 一个小球由静止开始在一个斜坡向下滚动, 其速度每秒增加 2 米/秒.

(1) 求小球速度 v 随时间 t 变化的函数关系式, 它是一次函数吗?

(2) 求第 2.5 秒时小球的速度.



(第 2 题)

3. 汽车油箱中原有油 50 升, 如果行驶中每

小时用油 5 升, 求油箱中的油量 y (单位: 升) 随行驶时间 x (单位: 时) 变化的函数解析式, 并写出自变量 x 的取值范围. y 是 x 的一次函数吗?

例 2 画出函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 的图象.

解: 函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 中, 自变量 x 可以是任意实数, 列表表示几组对应值 (填空):

x	-2	-1	0	1	2
$y=-6x$					
$y=-6x+5$					

画出函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 的图象.

你画出的图象与图 14.2-3 相同吗?

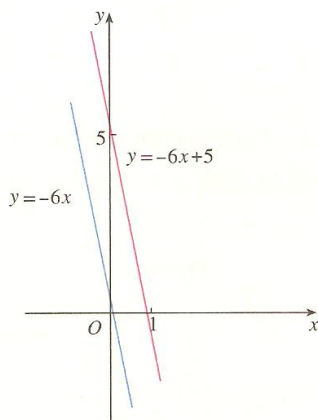


图 14.2-3



比较上面两个函数的图象的相同点与不同点.

填出你的观察结果: 这两个函数的图象形状都是_____, 并且倾斜程度_____. 函数 $y=-6x$ 的图象经过原点, 函数 $y=-6x+5$ 的图象与 y 轴交于点_____, 即它可以看作由直线 $y=-6x$ 向_____平移_____个单位长度而得到. 比较两个函数解析式, 你能说出两函数图象有上述关系的道理吗?

猜想 联系上面例 2, 考虑一次函数 $y=kx+b$ 的图象是什么形状, 它与直线 $y=kx$ 有什么关系?

比较这两个函数的解析式, 容易得出:

一次函数 $y=kx+b$ 的图象是一条直线，我们称它为直线 $y=kx+b$ ，它可以看作由直线 $y=kx$ 平移 $|b|$ 个单位长度而得到(当 $b>0$ 时，向上平移；当 $b<0$ 时，向下平移)。

例3 画出函数 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$ 的图象。

分析：由于一次函数的图象是直线，所以只要确定两个点就能画出它。

解：

x	0	1
$y=2x-1$	-1	1
$y=-0.5x+1$	1	0.5

过点 $(0, -1)$ 与点 $(1, 1)$ 画出直线 $y=2x-1$ ；过点 $(0, 1)$ 与点 $(1, 0.5)$ 画出直线 $y=-0.5x+1$ (图 14.2-4)。

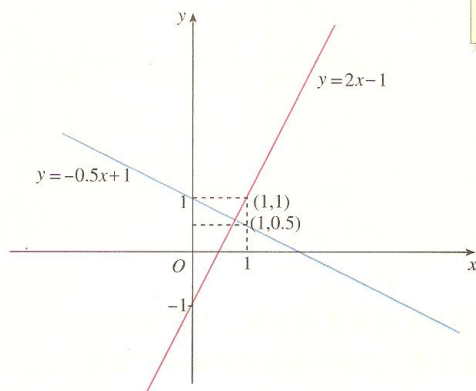


图 14.2-4

先画直线 $y=2x$ 与 $y=-0.5x$ ，再分别平移它们，也能得直线 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$ 。



画出函数 $y=x+1$ ， $y=-x+1$ ， $y=2x+1$ ， $y=-2x+1$ 的图象，由它们联想：一次函数解析式 $y=kx+b$ (k, b 是常数， $k \neq 0$) 中， k 的正负对函数图象有什么影响？

观察前面一次函数的图象，可以发现规律：

当 $k > 0$ 时，直线 $y = kx + b$ 由左至右上升；当 $k < 0$ 时，直线 $y = kx + b$ 由左至右下降。由此填出：一次函数 $y = kx + b$ (k, b 是常数， $k \neq 0$) 具有如下性质：

当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而_____；

当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而_____。

我们先通过观察发现图象（形）的规律，后又根据它得出关于数值大小的性质，这种数形结合的探究方法在数学学习中很重要。

练习

1. 直线 $y = 2x - 3$ 与 x 轴交点坐标为_____；与 y 轴交点坐标为_____；图象经过_____象限， y 随 x 的增大而_____。
2. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，每小题中三个函数的图象有什么关系？
 - (1) $y = x - 1$, $y = x$, $y = x + 1$;
 - (2) $y = -2x - 1$, $y = -2x$, $y = -2x + 1$.
3. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，并指出它们的共同之处：
 $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = -x + 1$.

例 4 已知一次函数的图象过点 $(3, 5)$ 与 $(-4, -9)$ ，求这个一次函数的解析式。

分析：求一次函数 $y = kx + b$ 的解析式，关键是求出 k, b 的值，从已知条件可以列出关于 k, b 的二元一次方程组，并求出 k, b 。

解：设这个一次函数的解析式为 $y = kx + b$ 。
因为 $y = kx + b$ 的图象过点 $(3, 5)$ 与 $(-4, -9)$ ，所以

$$\begin{cases} 3k + b = 5, \\ -4k + b = -9. \end{cases}$$

因为图象过 $(3, 5)$ 与 $(-4, -9)$ 点，所以这两点的坐标必适合解析式。

解方程组得

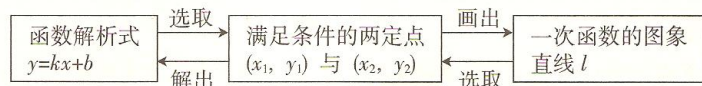
$$\begin{cases} k=2, \\ b=-1. \end{cases}$$

这个一次函数的解析式为 $y=2x-1$.

像例 4 这样先设出函数解析式, 再根据条件确定解析式中未知的系数, 从而具体写出这个式子的方法, 叫做待定系数法.

由于一次函数 $y=kx+b$ 中有 k 和 b 两个待定系数, 所以用待定系数法时需要根据两个条件列二元一次方程组 (以 k 和 b 为未知数), 解方程组后就能具体写出一一次函数的解析式.

例 3 与例 4 从两方面说明:



练习

1. 已知一次函数 $y=kx+2$, 当 $x=5$ 时 y 的值为 4, 求 k 的值.
2. 已知直线 $y=kx+b$ 经过点 $(9, 0)$ 和点 $(24, 20)$, 求 k, b 的值.

例 5 “黄金 1 号”玉米种子的价格为 5 元/千克, 如果一次购买 2 千克以上的种子, 超过 2 千克部分的种子的价格打 8 折.

(1) 填出下表:

购买种子数量/千克	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	...
付款金额/元									...

(2) 写出购买种子数量与付款金额之间的函数解析式, 并画出函数图象.

分析: 付款金额与种子价格相关, 问题中种子价格不是固定不变的, 它与购买种子数量有关. 设购买 x 千克种子, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 种子价格为 5 元/千克; 当 $x > 2$ 时, 其中有 2 千克种子按 5 元/千克计价, 其余的 $(x-2)$ 千克 (即超出 2 千克部分) 种子按 4 元/千克 (即 8 折) 计价. 因此, 写函数解析式与画函数图象时, 应对 $0 \leq x \leq 2$ 和 $x > 2$ 分段讨论.

解：(1)

购买种子数量/千克	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	...
付款金额/元	2.5	5	7.5	10	12	14	16	18	...

(2) 设购买种子数量为 x 千克，付款金额为 y 元.

当 $0 \leq x \leq 2$ 时， $y = 5x$.

当 $x > 2$ 时， $y = 4(x - 2) + 10 = 4x + 2$.

函数图象如图 14.2-5.

y 与 x 的函数解析式
也可合起来表示为

$$y = \begin{cases} 5x & (0 \leq x \leq 2), \\ 4x + 2 & (x > 2). \end{cases}$$

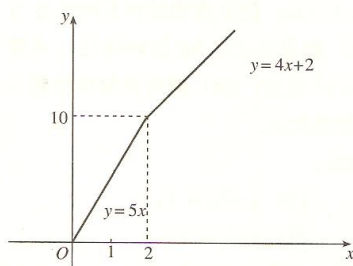


图 14.2-5

练习

一个试验室在 0:00—2:00 保持 20°C 的恒温，在 2:00—4:00 匀速升温，每小时升高 5°C 。写出时间 t (单位：时) 与试验室温度 T (单位： $^\circ\text{C}$) 之间的函数解析式，并画出函数图象。

习题14.2

复习巩固

1. 一列火车以 90 千米/时的速度匀速前进, 求它的行驶路程 s (单位: 千米) 随行驶时间 t (单位: 时) 变化的函数解析式, 画出函数图象.
2. 函数 $y = -5x$ 的图象在第_____象限内, 经过点 $(0, \quad)$ 与点 $(1, \quad)$, y 随 x 的增大而_____.
3. 一个弹簧不挂重物时长 12 cm, 挂上重物后伸长的长度与所挂重物的质量成正比. 如果挂上 1 kg 的物体后, 弹簧伸长 2 cm, 求弹簧总长 y (单位: cm) 随所挂物体质量 x (单位: kg) 变化的函数解析式.
4. 分别画出下列函数的图象:
 - (1) $y = 4x$;
 - (2) $y = 4x + 1$;
 - (3) $y = -4x + 1$;
 - (4) $y = -4x - 1$.
5. 在同一直角坐标系中, 画出函数 $y = 2x + 4$ 与 $y = -2x + 4$ 的图象, 指出每个函数中当 x 增大时 y 如何变化.
6. 已知一次函数 $y = kx + b$, 当 $x = 2$ 时 y 的值为 4, 当 $x = -2$ 时 y 的值为 -2 , 求 k 与 b .
7. 已知一次函数的图象经过点 $(-4, 9)$ 和点 $(6, 3)$, 求这个函数的解析式.



综合运用

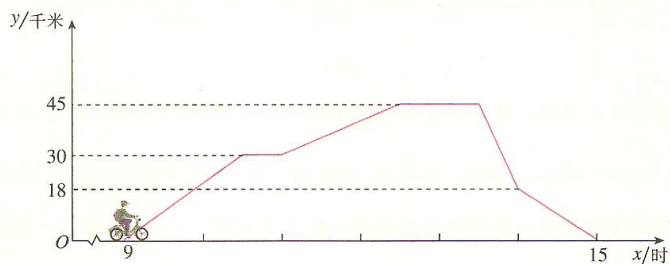
8. 一个函数的图象是经过原点的直线, 并且这条直线过第四象限及点 $(2, -3a)$ 与点 $(a, -6)$, 求这个函数的解析式.
9. 点 $P(x, y)$ 在第一象限, 且 $x + y = 8$, 点 A 的坐标为 $(6, 0)$, 设 $\triangle OPA$ 的面积为 S .
 - (1) 用含 x 的解析式表示 S , 写出 x 的取值范围, 画出函数 S 的图象.
 - (2) 当点 P 的横坐标为 5 时, $\triangle OPA$ 的面积为多少?
 - (3) $\triangle OPA$ 的面积能大于 24 吗? 为什么?
10. 不画图象仅从函数解析式, 能否看出直线 $y = 3x + 4$ 与 $y = 3x - 4$ 具有什么样的位置关系?

阅读与思考 科学家如何测算地球的年龄

11. (1) 当 $b > 0$ 时, 函数 $y = x + b$ 的图象经过哪几个象限?
(2) 当 $b < 0$ 时, 函数 $y = -x + b$ 的图象经过哪几个象限?
(3) 当 $k > 0$ 时, 函数 $y = kx + 1$ 的图象经过哪几个象限?
(4) 当 $k < 0$ 时, 函数 $y = kx + 1$ 的图象经过哪几个象限?

拓广探索

12. 图中的折线表示一骑车人离家的距离 y 与时间 x 的关系. 骑车人 9:00 离开家, 15:00 回家, 请你根据这个折线图回答下列问题:
- (1) 这个人什么时间离家最远? 这时他离家多远?
 - (2) 何时他开始第一次休息? 休息多长时间? 这时他离家多远?
 - (3) 11:00—12:30 他骑了多少千米?
 - (4) 他在 9:00—10:30 和 10:30—12:30 的平均速度各是多少?
 - (5) 他返家时的平均速度是多少?
 - (6) 14:00 时他离家多远? 何时他距家 10 千米?



阅读与思考

选学

科学家如何测算地球的年龄

你知道如何测算地球的年龄吗? 在解决这个问题中也用到函数这个数学工具.

1896 年, 法国物理学家贝克勒尔发现, 铀的化合物能放射出一种肉眼看不见的射线,

这种射线可以使在黑纸里的照相底片感光. 这引起了科学家居里夫人的注意, 她又发现了一些放射性更强的元素. 1903 年, 英国物理学家卢瑟福通过实验证实, 放射性物质在放出射线的同时, 本身有一部分“蜕变”为其他物质. 这种蜕变的规律是: 一种物质放出射线后, 这种物质的量将减少, 减少的速度开始较快, 后来较慢. 物质所剩的量与时间成指数函数关系. 这种函数我们还没有学过, 但可以从函数的图象中来认识它的变化规律. 图 1 为镭的放射规律.

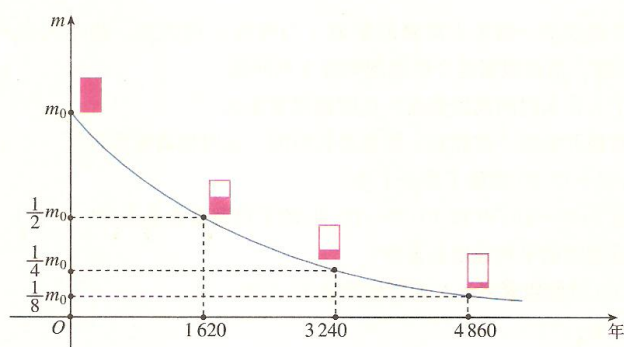


图 1

由图象我们可以发现: 镭的质量由 m_0 缩减到 $\frac{1}{2}m_0$ 约需 1 620 年, 由 $\frac{1}{2}m_0$ 缩减到 $\frac{1}{4}m_0$ 约需年数为 $3\,240 - 1\,620 = 1\,620$, 由 $\frac{1}{4}m_0$ 缩减到 $\frac{1}{8}m_0$ 约需年数为 $4\,860 - 3\,240 = 1\,620$, 即镭的质量缩减为原来的一半所用的时间是一个不变的量——1 620 年, 一般把 1 620 年称为镭的半衰期.

实际上, 所有的放射性物质都有自己的半衰期, 铀的半衰期为 45.6 亿年. 蜕变后的铀最后成为铅, 科学家们测出一块岩石中现在含铀和铅的质量, 便可以算出这块岩石原来的含铀量, 进而利用半衰期算出从原来含铀量到现在含铀量经过了多少时间, 从而推算出这块岩石的年龄. 正是利用这种方法, 科学家测算出地球上最古老的岩石的年龄约为 30 亿年. 当然, 地球的年龄要比这更大一些, 估计有 45 亿 ~ 46 亿年.

14.3 用函数观点看方程(组)与不等式

14.3 用函数观点看方程(组)与不等式

14.3.1 一次函数与一元一次方程

我们先来看下面两个问题有什么关系：

(1) 解方程 $2x+20=0$.

(2) 自变量 x 为何值时函数 $y=2x+20$ 的值为 0?

在问题(1)中，解方程 $2x+20=0$ ，得 $x=-10$ ；解问题(2)就是要考虑当函数 $y=2x+20$ 的值为 0 时，所对应的自变量 x 为何值，这可以通过解方程 $2x+20=0$ ，得出 $x=-10$ 。因此这两个问题实际上是同一个问题。

从函数图象上看，直线 $y=2x+20$ 与 x 轴的交点的坐标是 $(-10, 0)$ (图 14.3-1)，这也说明，方程 $2x+20=0$ 的解是 $x=-10$ 。

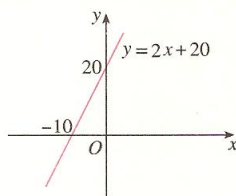


图 14.3-1



思考

由上面两个问题的关系，能进一步得到“解方程 $ax+b=0$ (a, b 为常数)”与“求自变量 x 为何值时，一次函数 $y=ax+b$ 的值为 0”有什么关系？

由于任何一元一次方程都可以转化为 $ax+b=0$ (a, b 为常数， $a \neq 0$) 的

形式，所以解一元一次方程可以转化为：当某个一次函数的值为0时，求相应的自变量的值. 从图象上看，这相当于已知直线 $y=ax+b$ ，确定它与 x 轴交点的横坐标的值.

例 1 一个物体现在的速度是5米/秒，其速度每秒增加2米/秒，再过几秒它的速度为17米/秒？

解法 1： 设再过 x 秒物体的速度为17米/秒. 列方程

$$2x+5=17.$$

解得

$$x=6.$$

解法 2： 速度 y (单位：米/秒) 是时间 x (单位：秒) 的函数

$$y=2x+5.$$

由

$$2x+5=17,$$

得

$$2x-12=0.$$

由图 14.3-2，看出直线 $y=2x-12$ 与 x 轴的交点为 $(6, 0)$ ，得 $x=6$.

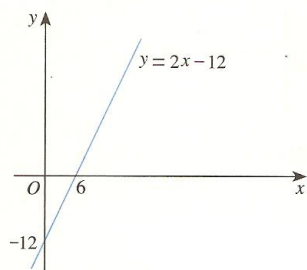


图 14.3-2

这两种解法分别从数与形两方面得出相同的结果.

14.3.2 一次函数与一元一次不等式

看下面两个问题有什么关系：

(1) 解不等式 $5x+6>3x+10$.

(2) 自变量 x 为何值时函数 $y=2x-4$ 的值大于 0?

在问题 (1) 中, 不等式 $5x+6>3x+10$ 可以转化为 $2x-4>0$, 解这个不等式得 $x>2$; 解问题 (2) 就是要解不等式 $2x-4>0$, 得出 $x>2$ 时函数 $y=2x-4$ 的值大于 0, 因此这两个问题实际上是同一个问题. 从直线 $y=2x-4$ (图 14.3-3) 可以看出, 当 $x>2$ 时这条直线上的点在 x 轴的上方, 即这时 $y=2x-4>0$.

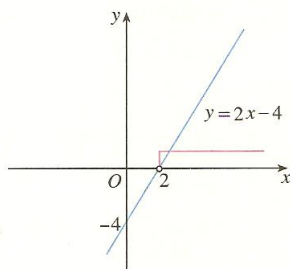


图 14.3-3

思考

由上面两个问题的关系, 能进一步得到“解不等式 $ax+b>0$ ”与“求自变量 x 在什么范围内, 一次函数 $y=ax+b$ 的值大于 0”有什么关系?

由于任何一元一次不等式都可以转化为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$ (a, b 为常数, $a\neq 0$) 的形式, 所以解一元一次不等式可以看作: 当一次函数值大 (小) 于 0 时, 求自变量相应的取值范围.

例 2 用画函数图象的方法解不等式 $5x+4<2x+10$.

解法 1: 原不等式化为 $3x-6<0$, 画出直线 $y=3x-6$ (图 14.3-4). 可以看出, 当 $x<2$ 时这条直线上的点在 x 轴的下方, 即这时 $y=3x-6<0$, 所以不等式的解集为 $x<2$.

解法 2: 将原不等式的两边分别看作两个一次函数, 画出直线 $y=5x+4$ 与

直线 $y=2x+10$ (图 14.3-5). 可以看出, 它们的交点的横坐标为 2, 当 $x<2$ 时, 对于同一个 x , 直线 $y=5x+4$ 上的点在直线 $y=2x+10$ 上相应点的下方, 这时 $5x+4<2x+10$, 所以不等式的解集为 $x<2$.

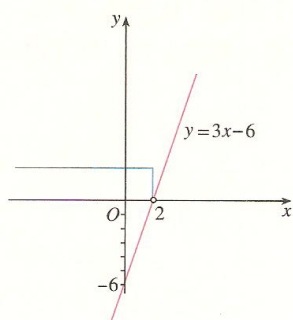


图 14.3-4

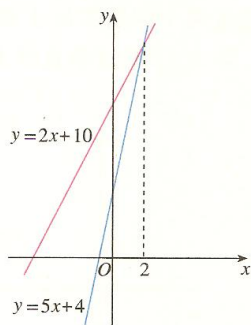


图 14.3-5

两种解法
都把解不等式
转化为比较直
线上点的位置
的高低.



虽然像上面那样用一次函数图象来解方程或不等式未必简单, 但是从函数角度看问题, 能发现一次函数、一元一次方程与一元一次不等式之间的联系, 能直观地看到怎样用图形来表示方程的解与不等式的解, 这种用函数观点认识问题的方法, 对于继续学习数学很重要.

练习

1. 自变量 x 的取值满足什么条件时, 函数 $y=3x+8$ 的值满足下列条件?

- (1) $y=0$; (2) $y=-7$;
(3) $y>0$; (4) $y<2$.

2. 利用函数图象解出 x :

- (1) $5x-1=2x+5$; (2) $6x-4<3x+2$.

14.3.3 一次函数与二元一次方程(组)

我们知道, 方程 $3x+5y=8$ 可以转化为 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$, 并且直线 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ 上每个点的坐标 (x, y) 都是方程 $3x+5y=8$ 的解. 由于任意一个二元一次方程都可以转化为 $y=kx+b$ 的形式, 所以每个二元一次方程都对应一个一次函数, 于是也对应一条直线.

解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x+5y=8, \\ 2x-y=1, \end{cases}$$

可以看作求两个一次函数 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ 与 $y=2x-1$ 图象的交点坐标 (图 14.3-6), 因此我们可以用画图象的方法解二元一次方程组.

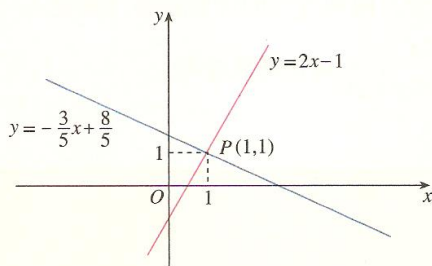


图 14.3-6

你能归纳出图象法解二元一次方程组的具体方法吗?

一般地, 每个二元一次方程组都对应两个一次函数, 于是也对应两条直线. 从“数”的角度看, 解方程组相当于考虑自变量为何值时两个函数的值相等, 以及这个函数值是何值; 从“形”的角度看, 解方程组相当于确定两条直线交点的坐标.

综上所述, 一次函数与二元一次方程(组)有密切的联系.

例 3 一家电信公司给顾客提供上网费的两种计费方式: 方式 A 以每分钟 0.1 元的价格按上网时间计费; 方式 B 除收月基费 20 元外再以每分钟 0.05 元的价格按上网时间计费. 上网时间为多少分, 两种方式的计费相等?

分析: 计费与上网时间有关, 所以可设上网时间为 x 分, 分别写出两种计费方式的函数模型, 然后再考虑自变量为何值时两个函数的值相等.

解：设上网时间为 x 分，方式 A 的计费 $y=0.1x$ 元；按方式 B 的计费 $y=0.05x+20$ 元。

在同一直角坐标系中分别画出这两个函数的图象（图 14.3-7）。

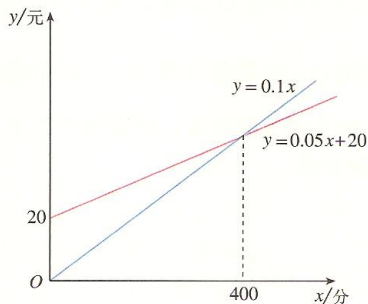


图 14.3-7

两个函数的图象交于点 $(400, 40)$ 。这表示当 $x=400$ 时，两个函数的值都等于 40。因此，上网时间为 400 分，两种方式的计费相等（都是 40 元）。

本题的解法与解方程组 $\begin{cases} y=0.1x \\ y=0.05x+20 \end{cases}$ 具有同样效果。



方程（组）、不等式与函数之间互相联系，用函数观点可以把它统一起来。解决问题时，应根据具体情况灵活地把它们结合起来考虑。

练习

在一元一次方程一章中，我们曾考虑过下面两种移动电话计费方式：

	方式一	方式二
月租费	30 元/月	0
本地通话费	0.30 元/分	0.40 元/分

用函数方法解答何时两种计费方式费用相等。

习题14.3

复习巩固

1. 当自变量 x 的取值满足什么条件时, 函数 $y=5x+17$ 的值满足下列条件?
(1) $y=0$; (2) $y=-7$; (3) $y=20$.
2. 利用函数图象解出 x , 并笔算检验:
(1) $5x-3=x+2$; (2) $0.5x-4=3x+2$.
3. 当自变量 x 的取值满足什么条件时, 函数 $y=\frac{3}{2}x+6$ 的值满足下列条件?
(1) $y=0$; (2) $y<0$; (3) $y>0$; (4) $y<2$.
4. 利用函数图象解不等式:
(1) $5x-1>2x+5$; (2) $x-4<3x+1$.
5. 当自变量 x 取何值时, 函数 $y=\frac{5}{2}x+1$ 与 $y=5x+17$ 的值相等? 这个函数值是多少?
6. 利用函数图象解方程组:
(1) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2y=4, \\ 2x-y=6. \end{cases}$

综合运用

7. 一个静止的物体开始运动, 其速度每秒增加 0.5 米/秒, 多少秒后它的速度超过 6 米/秒? 多少秒之内它的速度不超过 8.5 米/秒?
8. 从 A 地向 B 地打长途电话, 通话 3 分以内收费 2.4 元, 3 分后每增加通话时间 1 分加收 1 元, 求通话费用 y (单位: 元) 随通话时间 x (单位: 分, x 为正整数) 变化的函数关系式. 有 10 元钱时, 打一次电话最多可以打多长时间?
9. A, B 两个商场平时以同样价格出售相同的商品, 春节期间让利酬宾, A 商场所有商品按 8 折价格出售; 在 B 商场消费金额超过 200 元后, 超出部分可在这家商场按 7 折价格购物. 试问如何选择商场来购物更经济?

拓广探索

10. 一个有进水管与出水管的容器, 从某时刻开始的 4 分内只进水不出水, 在随后的 8 分内既进水又出水, 每分的进水量和出水量是两个常数, 容器内的水量 y (单位: 升)

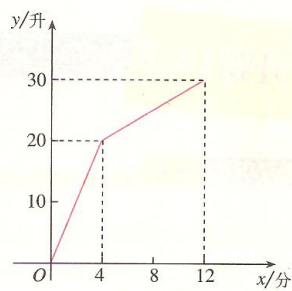
与时间 x (单位: 分) 之间的关系如图所示.

(1) 求 $0 \leq x \leq 4$ 时 y 随 x 变化的函数关系式.

(2) 求 $4 < x \leq 12$ 时 y 随 x 变化的函数关系式.

(3) 每分进水、出水各多少升?

11. 一次越野赛跑中, 当小明跑了 1 600 米时, 小刚跑了 1 450 米. 此后两人分别以 a 米/秒和 b 米/秒匀速跑, 又过 100 秒时小刚追上小明, 200 秒时小刚到达终点, 300 秒时小明到达终点. 这次越野赛跑的全程为多少?



(第 10 题)

14.4 课题学习 选择方案



做一件事情，有时有不同的实施方案，比较这些方案，从中选择最佳方案作为行动计划，是非常必要的。在选择方案时，往往需要从数学角度进行分析，涉及变量的问题常用到函数。同学们通过讨论下面三个问题，可以体会如何运用一次函数选择最佳方案。解决这些问题后，可以进行后面的实践活动。

问题1 用哪种灯省钱

一种节能灯的功率为10瓦（即0.01千瓦），售价为60元；一种白炽灯的功率为60瓦（即0.06千瓦），售价为3元。两种灯的照明效果一样，使用寿命也相同（3 000小时以上）。如果电费价格为0.5元/（千瓦·时），消费者选用哪种灯可以节省费用？

分析：要考虑如何节省费用，必须既考虑灯的售价又考虑电费。不同灯的售价分别是不同的常数，而电费与照明时间成正比例。因此，总费用与灯的售价、功率这些常数有关，而且与照明时间有关，写出函数解析式是分析问题的基础。

设照明时间为 x 小时，则用节能灯的总费用为

$$y_1 = 0.5 \times 0.01x + 60. \quad \text{①}$$

类似地可以写出用白炽灯的总费用为

$$y_2 = \underline{\hspace{2cm}}. \quad \text{②}$$

讨论：根据①②两个函数，考虑下列问题：

- (1) x 为何值时 $y_1 = y_2$ ？
- (2) x 为何值时 $y_1 > y_2$ ？
- (3) x 为何值时 $y_1 < y_2$ ？

试利用函数解析式及图象给出解答,并结合方程、不等式进行说明.
在考虑上述问题的基础上,你能为消费者选择节省费用的用灯方案吗?

问题2 怎样租车

某学校计划在总费用 2 300 元的限额内,租用汽车送 234 名学生和 6 名教师集体外出活动,每辆汽车上至少要有 1 名教师.

现有甲、乙两种大客车,它们的载客量和租金如下表:

	甲种客车	乙种客车
载客量(单位:人/辆)	45	30
租金(单位:元/辆)	400	280

- (1) 共需租多少辆汽车?
- (2) 给出最节省费用的租车方案.

分析: (1) 可以从乘车人数的角度考虑租多少辆汽车,即要注意到以下要求:

- ① 要保证 240 名师生有车坐;
- ② 要使每辆汽车上至少要有 1 名教师.

根据①可知,汽车总数不能小于____;根据②可知,汽车总数不能大于____. 综合起来可知汽车总数为____.

(2) 租车费用与所租车的种类有关,可以看出,当汽车总数 a 确定后,在满足各项要求的前提下,尽可能少地租用甲种客车可以节省费用.

设租用 x 辆甲种客车,则租车费用 y (单位:元) 是 x 的函数,即

$$y=400x+280(a-x).$$

将 (1) 中确定的 a 的值代入上式,化简这个函数,得

$$y=_____.$$

讨论: 根据问题中各条件,自变量 x 的取值应有几种可能?

为使 240 名师生有车坐, x 不能小于____;为使租车费用不超过 2 300 元, x 不能超过____. 综合起来可知 x 的取值为_____.

在考虑上述问题的基础上,你能得出几种不同的租车方案? 为节省费用应

选择其中哪个方案？试说明理由.

问题 3 怎样调水

从 A, B 两水库向甲、乙两地调水, 其中甲地需水 15 万吨, 乙地需水 13 万吨, A, B 两水库各可调出水 14 万吨. 从 A 地到甲地 50 千米, 到乙地 30 千米; 从 B 地到甲地 60 千米, 到乙地 45 千米. 设计一个调运方案使水的调运量 (单位: 万吨·千米) 尽可能小.

分析: 首先应考虑到影响水的调运量的因素有两个, 即水量 (单位: 万吨) 和运程 (单位: 千米), 水的调运量是两者的乘积 (单位: 万吨·千米); 其次应考虑到由 A, B 水库运往甲、乙两地的水量共 4 个量, 即 A——甲, A——乙, B——甲, B——乙的水量, 它们互相联系. 设从 A 水库调往甲地的水量为 x 吨, 则有

水量/万吨 调出地	调入地 甲	乙	总计
A	x	$14-x$	14
B	$15-x$	$x-1$	14
总计	15	13	28

设水的调运量为 y 万吨·千米, 则有

$$y=50x+30(14-x)+60(15-x)+45(x-1).$$

讨论: (1) 化简这个函数, 并指出其中自变量 x 的取值应有什么限制条件.

(2) 画出这个函数的图象.

(3) 结合函数解析式及其图象说明水的最佳调运方案. 水的最小调运量为多少?

(4) 如果设其他水量 (例如从 B 水库调往乙地的水量) 为 x 万吨, 能得到同样的最佳方案吗?



解决含有多个变量的问题时，可以分析这些变量之间的关系，从中选取有代表性的变量作为自变量，然后根据问题的条件寻求可以反映实际问题的函数，以此作为解决问题的数学模型.

实践活动：

结合日常生活中某个可以选择多种实施方案的实际问题，例如购物、配送、上网、通讯等，利用数学知识进行分析，选择最佳方案，并写出有关活动的报告.

数学活动

数学活动

活动 1

- (1) 根据下表的数据在直角坐标系中画出人口增长曲线图；
- (2) 选择一个近似于人口增长曲线的一次函数，写出它的解析式；
- (3) 按照这样的增长趋势，试估计 2004 年我国的人口数。

中国人口数统计表

年 份	人口数/亿	年 份	人口数/亿
1964	7.04	1984	10.34
1969	8.06	1989	11.06
1974	9.08	1994	11.76
1979	9.79	1999	12.52

活动 2

下表是某通讯公司对移动电话的几种不同收费方案。

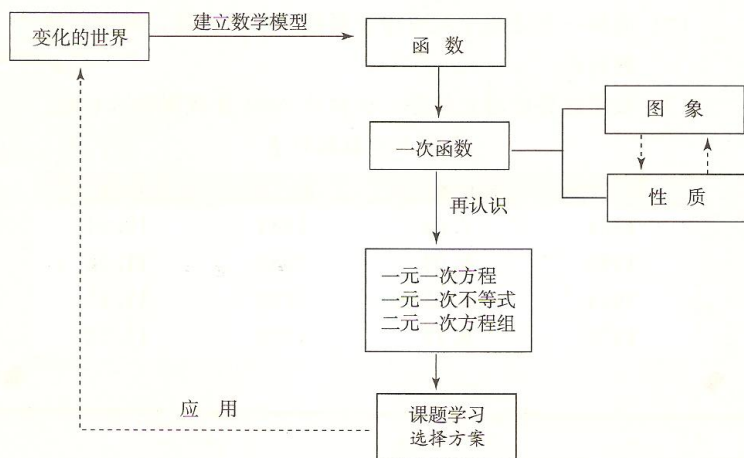
方案代号	月租费/元	免费时间/分	超过免费时间的通话费 元/分
0	50	0	0.40
1	30	48	0.60
2	98	170	0.60
3	168	330	0.50
4	268	600	0.45
5	388	1 000	0.40

- (1) 分别写出方案 0, 3, 5 中月话费（月租费与通话费的总和） y （单位：元）与通话时间 x （单位：分）的函数解析式；
- (2) 如果月通话时间为 300 分左右，选择哪个方案最省钱？
- (3) 通过图象比较方案 0, 1, 2 和 3，由此你对选择方案有什么建议？

小 结

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 为了研究变化的世界，我们引入了函数。在同一变化的过程中两个相互制约、相互依存的量 x, y 满足什么条件时， y 是 x 的函数？举出一些函数的实例。
2. 举例说明函数有哪几种表示法，它们各有什么优点？
3. 正比例函数 $y=kx$ 中， k 的正负对函数图象有什么影响？正比例函数 $y=kx$ 与一次函数 $y=kx+b$ ($b \neq 0$) 的图象之间有什么关系？
4. 举例说明一次函数 $y=kx+b$ 中的常数 k 对图象的影响，结合图象说明一次函数的性质。由一次函数的图象怎样求出它的解析式？
5. 一元一次方程、一元一次不等式、二元一次方程组与一次函数之间有什么关系？怎样用函数图象解方程（组）或解不等式？
6. 体会怎样建立实际问题的函数模型。

复习题 14

复习题14

复习巩固

1. 小亮为赞助“希望工程”现已存款 100 元, 他计划今后三年每月存款 10 元, 存款总数 y (单位: 元) 将随时间 x (单位: 月) 的变化而改变. 指出其中的常量与变量, 自变量与函数, 试写出函数解析式.

2. 判断下列各点是否在直线 $y=2x+6$ 上, 这条直线与坐标轴交于何处?

$(-5, -4), (-7, 20),$

$(-\frac{7}{2}, 1), (\frac{2}{3}, 7\frac{1}{3}).$

3. 填空:

(1) 直线 $y=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x$ 经过第_____象

限, y 随 x 的增大而_____;

(2) 直线 $y=3x-2$ 经过第_____象限, y 随 x 的增大而_____.

4. 根据下列条件分别确定函数 $y=kx+b$ 的解析式:

(1) y 与 x 成正比例, $x=5$ 时 $y=6$;

(2) 直线 $y=kx+b$ 经过点 $(3, 6)$ 与点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

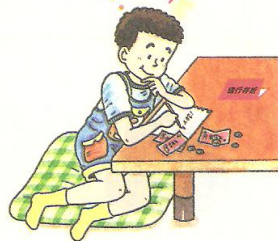
5. 试根据函数 $y=3x-15$ 的图象或性质, 确定 x 取何值时:

(1) $y>0$;

(2) $y<0$.



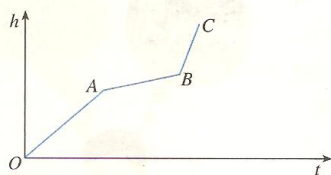
已存款100元, 今后三年每月要存10元, 三年后捐给贫困地区的小朋友.



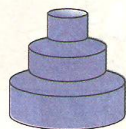
综合运用

6. 在某火车站托运物品时, 不超过 1 千克的物品需付 2 元, 以后每增加 1 千克 (不足 1 千克按 1 千克计) 需增加托运费 5 角, 设托运 p 千克 (p 为整数) 物品的费用为 c 元, 写出 c 的计算公式.

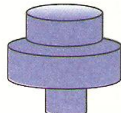
7. 某水果批发市场规定, 批发苹果不少于 100 千克时, 批发价为每千克 2.5 元. 小王携带现金 3 000 元到该市场采购苹果, 并以批发价买进. 如果购买的苹果为 x 千克, 小王付款后还剩余现金 y 元, 试写出 y 关于 x 的函数解析式, 并指出自变量 x 的取值范围.
8. 均匀地向一个容器注水, 最后把容器注满. 在注水过程中, 水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图所示 (图中 $OABC$ 为一折线), 这个容器的形状是图中哪一个? 你能画出向另两个容器注水时水面高度 h 随时间 t 变化的图象 (草图) 吗?



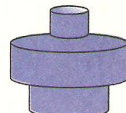
(1)



(2)



(3)

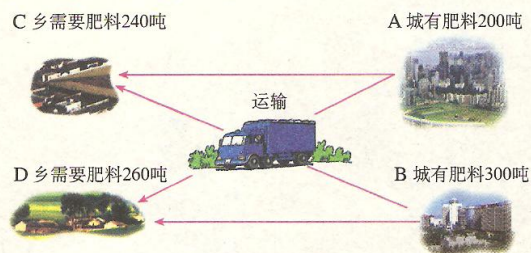


(第 8 题)

9. 已知等腰三角形周长为 20.
- (1) 写出底边长 y 关于腰长 x 的函数解析式 (x 为自变量);
 - (2) 写出自变量取值范围;
 - (3) 在直角坐标系中, 画出函数图象.
10. 已知 $A(8, 0)$ 及在第一象限的动点 $P(x, y)$, 且 $x+y=10$, 设 $\triangle OPA$ 的面积为 S .
- (1) 求 S 关于 x 的函数解析式;
 - (2) 求 x 的取值范围;
 - (3) 求 $S=12$ 时 P 点坐标;
 - (4) 画出函数 S 的图象.
11. (1) 画出函数 $y = |x-1|$ 的图象;
- (2) 设 $P(x, 0)$ 是 x 轴上的一个动点, 它与 x 轴上表示 -3 的点的距离为 y , 求 x 的函数 y 的解析式, 画出这个函数的图象.

拓广探索

12. A 城有肥料 200 吨, B 城有肥料 300 吨, 现要把这些肥料全部运往 C, D 两乡. 从 A 城往 C, D 两乡运肥料的费用分别为每吨 20 元和 25 元; 从 B 城往 C, D 两乡运肥料的费用分别为每吨 15 元和 24 元, 现 C 乡需要肥料 240 吨, D 乡需要肥料 260 吨, 怎样调运可使总运费最少?



(第 12 题)

第十五章 整式的乘除与因式分解



第十五章

整式的乘除与因式分解

为了扩大绿地面积，要把街心花园的一块长 m 米，宽 b 米的长方形绿地，向两边分别加宽 a 米和 c 米（如上图），你能用几种方法表示扩大后绿地的面积？不同的表示方法之间有什么关系？如何从数学的角度认识它们之间的关系？

回答上面的问题要运用到整式的乘除、因式分解的知识。它们是数、式运算，及解决其他许多数学问题的重要基础。我们可以从数的乘除运算中，得到关于整式的乘除运算的启发。

15.1 整式的乘法

15.1 整式的乘法

15.1.1 同底数幂的乘法

问题 一种电子计算机每秒可进行 10^{14} 次运算，它工作 10^3 秒可进行多少次运算？



它工作 10^3 秒可进行运算的次数为 $10^{14} \times 10^3$.
怎样计算 $10^{14} \times 10^3$ 呢？

根据乘方的意义可知

$$\begin{aligned} 10^{14} \times 10^3 &= (\underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{14 \text{ 个 } 10}) \times (\underbrace{10 \times 10 \times 10}_{3 \text{ 个 } 10}) \\ &= (\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{17 \text{ 个 } 10}) \\ &= 10^{17}. \end{aligned}$$



根据乘方的意义填空，看看计算结果有什么规律：

(1) $2^5 \times 2^2 = 2^{(\quad)}$;

(2) $a^3 \cdot a^2 = a^{(\quad)}$;

(3) $5^m \cdot 5^n = 5^{(\quad)}$.

对于任意底数 a 与任意正整数 m, n ,

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= (\underbrace{aa \cdots a}_{m \text{ 个 } a}) (\underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ 个 } a}) \\ &= \underbrace{aa \cdots a}_{(m+n) \text{ 个 } a} = a^{m+n}. \end{aligned}$$

一般地，我们有

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 都是正整数}).$$

即同底数幂相乘，底数不变，指数相加。

例 1 计算：

- (1) $x^2 \cdot x^5$; (2) $a \cdot a^6$;
(3) $2 \times 2^4 \times 2^3$; (4) $x^m \cdot x^{3m+1}$.

解：(1) $x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7$.
(2) $a \cdot a^6 = a^{1+6} = a^7$.
(3) $2 \times 2^4 \times 2^3 = 2^{1+4+3} = 2^8$.
(4) $x^m \cdot x^{3m+1} = x^{m+3m+1} = x^{4m+1}$.

$$a = a^1.$$

练习

计算：

- (1) $b^5 \cdot b$; (2) $10 \times 10^2 \times 10^3$;
(3) $-a^2 \cdot a^6$; (4) $y^{2n} \cdot y^{n+1}$.

15.1.2 幂的乘方



根据乘方的意义及同底数幂的乘法填空，看看计算的结果有什么规律：

- (1) $(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{(\quad)}$;
(2) $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{(\quad)}$;
(3) $(a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{(\quad)}$ (m 是正整数).

对于任意底数 a 与任意正整数 m, n ,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \uparrow a^m} = a^{\underbrace{m+m+\dots+m}_{n \uparrow m}} = a^{mn}.$$

一般地，我们有

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 都是正整数}).$$

即幂的乘方，底数不变，指数相乘.

例 2 计算:

- (1) $(10^3)^5$; (2) $(a^4)^4$;
(3) $(a^m)^2$; (4) $-(x^4)^3$.

解: (1) $(10^3)^5 = 10^{3 \times 5} = 10^{15}$.

(2) $(a^4)^4 = a^{4 \times 4} = a^{16}$.

(3) $(a^m)^2 = a^{m \times 2} = a^{2m}$.

(4) $-(x^4)^3 = -x^{4 \times 3} = -x^{12}$.

练习

计算:

- (1) $(10^3)^3$; (2) $(x^3)^2$;
(3) $-(x^m)^5$; (4) $(a^2)^3 \cdot a^5$.

15.1.3 积的乘方



填空，看看运算过程用到哪些运算律？运算结果有什么规律？

(1) $(ab)^2 = (ab) \cdot (ab) = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a^{(\quad)} b^{(\quad)}$;

(2) $(ab)^3 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = a^{(\quad)} b^{(\quad)}$.

对于任意底数 a , b 与任意正整数 n ,

$$\begin{aligned}(ab)^n &= \overbrace{(ab) \cdot (ab) \cdots (ab)}^{n \uparrow ab} \\ &= \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \uparrow a} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdots b}^{n \uparrow b} = a^n b^n.\end{aligned}$$

一般地，我们有

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (n \text{ 为正整数}).$$

即积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

例3 计算:

- (1) $(2a)^3$; (2) $(-5b)^3$;
(3) $(xy^2)^2$; (4) $(-2x^3)^4$.

解: (1) $(2a)^3 = 2^3 \cdot a^3 = 8a^3$.

(2) $(-5b)^3 = (-5)^3 \cdot b^3 = -125b^3$.

(3) $(xy^2)^2 = x^2 \cdot (y^2)^2 = x^2y^4$.

(4) $(-2x^3)^4 = (-2)^4 \cdot (x^3)^4 = 16x^{12}$.

练习

计算:

- (1) $(ab)^4$; (2) $(-2xy)^3$;
(3) $(-3 \times 10^2)^3$; (4) $(2ab^2)^3$.

15.1.4 整式的乘法

问题 光的速度约为 3×10^5 千米/秒, 太阳光照射到地球上需要的时间大约是 5×10^2 秒, 你知道地球与太阳的距离约是多少千米吗?

地球与太阳的距离约是 $(3 \times 10^5) \times (5 \times 10^2)$ 千米.

地球与太阳的
距离约是
 $15 \times 10^7 = 1.5 \times 10^8$
(千米).



(1) 怎样计算 $(3 \times 10^5) \times (5 \times 10^2)$? 计算过程中用到哪些运算律及运算性质?

(2) 如果将上式中的数字改为字母, 比如 $ac^5 \cdot bc^2$, 怎样计算这个式子?

$ac^5 \cdot bc^2$ 是两个单项式 ac^5 与 bc^2 相乘, 我们可以利用乘法交换律、结合律及同底数幂的运算性质来计算:

$$ac^5 \cdot bc^2 = (a \cdot b) \cdot (c^5 \cdot c^2) = abc^{5+2} = abc^7.$$

单项式与单项式相乘，把它们的系数、相同字母分别相乘，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式。

例4 计算：

(1) $(-5a^2b)(-3a)$; (2) $(2x)^3(-5xy^2)$.

解：(1) $(-5a^2b)(-3a)$
 $= [(-5) \times (-3)](a^2 \cdot a)b$
 $= 15a^3b.$

(2) $(2x)^3(-5xy^2)$
 $= 8x^3(-5xy^2)$
 $= [8 \times (-5)](x^3 \cdot x)y^2$
 $= -40x^4y^2.$

练习

1. 计算：

(1) $3x^2 \cdot 5x^3$; (2) $4y \cdot (-2xy^2)$;
(3) $(3x^2y)^3 \cdot (-4x)$; (4) $(-2a)^3 \cdot (-3a)^2$.

2. 下面计算的对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^6$; (2) $2x^2 \cdot 3x^2 = 6x^4$;
(3) $3x^2 \cdot 4x^2 = 12x^2$; (4) $5y^3 \cdot 3y^5 = 15y^{15}$.

问题 三家连锁店以相同的价格 m （单位：元/瓶）销售某种商品，它们在一个月内的销售量（单位：瓶）分别是 a, b, c . 你能用不同的方法计算它们在这个月内销售这种商品的总收入吗？

一种方法是先求三家连锁店的总销量，再求总收入，即总收入（单位：元）为：

$$m(a+b+c). \quad \textcircled{1}$$

另一种方法是先分别求三家连锁店的收入，再求它们的和，即总收入（单位：元）为

$$ma + mb + mc.$$

由于①②表示同一个量，所以

$$m(a+b+c) = ma + mb + mc.$$

上面的等式提供了单项式与多项式相乘的方法.

②

你能根据分配律得到这个等式吗？

单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加.

例 5 计算：

(1) $(-4x^2) \cdot (3x+1)$;

(2) $\left(\frac{2}{3}ab^2 - 2ab\right) \cdot \frac{1}{2}ab$.

解：(1) $(-4x^2) \cdot (3x+1)$
 $= (-4x^2) \cdot (3x) + (-4x^2) \cdot 1$
 $= (-4 \times 3)(x^2 \cdot x) + (-4x^2)$
 $= -12x^3 - 4x^2.$

(2) $\left(\frac{2}{3}ab^2 - 2ab\right) \cdot \frac{1}{2}ab$
 $= \frac{2}{3}ab^2 \cdot \frac{1}{2}ab + (-2ab) \cdot \frac{1}{2}ab$
 $= \frac{1}{3}a^2b^3 - a^2b^2.$

把单项式与多项式相乘的问题转化为单项式与单项式相乘的问题.

现在你能解决本章引言中绿地面积的问题了吗？

练习

1. 计算：

(1) $3a(5a-2b)$;

(2) $(x-3y) \cdot (-6x).$

2. 化简 $x(x-1) + 2x(x+1) - 3x(2x-5).$

问题 如图 15.1-1, 为了扩大街心花园的绿地面积, 把一块原长 a 米、宽 m 米的长方形绿地, 增长了 b 米, 加宽了 n 米. 你能用几种方法求出扩大后的绿地的面积?

扩大后的绿地可以看成长为 $(a+b)$ 米, 宽为 $(m+n)$ 米的长方形, 所以这块绿地的面积为

$$(a+b)(m+n) \text{ 米}^2.$$

扩大后的绿地还可以看成由四个小长方形组成, 所以这块绿地的面积为

$$(am+an+bm+bn) \text{ 米}^2.$$

$$\text{因此 } (a+b)(m+n)=am+an+bm+bn.$$

上面的等式提供了多项式与多项式相乘的方法.

计算 $(a+b)(m+n)$, 可以先把其中的一个多项式, 如 $m+n$, 看成一个整体, 运用单项式与多项式相乘的法则, 得

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n),$$

再利用单项式与多项式相乘的法则, 得

$$a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn.$$

总体上看, $(a+b)(m+n)$ 的结果可以看作由 $a+b$ 的每一项乘 $m+n$ 的每一项, 再把所得的积相加而得到的, 即

$$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn.$$

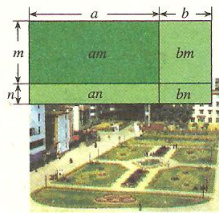


图 15.1-1

把多项式相乘的问题转化为单项式与多项式相乘的问题.

多项式与多项式相乘, 先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项, 再把所得的积相加.

例 6 计算:

$$(1) (3x+1)(x+2); \quad (2) (x-8y)(x-y);$$

$$(3) (x+y)(x^2-xy+y^2).$$

解: (1) $(3x+1)(x+2)$

$$=(3x) \cdot x + (3x) \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2$$

$$=3x^2+6x+x+2$$

$$=3x^2+7x+2.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (x-8y)(x-y) \\ &=x^2-xy-8xy+8y^2 \\ &=x^2-9xy+8y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &=x^3-x^2y+xy^2+x^2y-xy^2+y^3 \\ &=x^3+y^3. \end{aligned}$$

练习

1. 计算:

$$(1) (2x+1)(x+3); \quad (2) (m+2n)(m-3n);$$

$$(3) (a-1)^2; \quad (4) (a+3b)(a-3b);$$

$$(5) (2x^2-1)(x-4); \quad (6) (x^2+3)(2x-5).$$

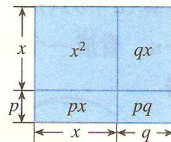
2. 计算:

$$(1) (x+2)(x+3); \quad (2) (x-4)(x+1);$$

$$(3) (y+4)(y-2); \quad (4) (y-5)(y-3).$$

由上面计算的结果找规律, 观察右图, 填空:

$$(x+p)(x+q)=(\quad)^2+(\quad)x+(\quad).$$



(第2题)

习题15.1

复习巩固

1. 下面的计算对不对? 如果不对, 应当怎样改正.

$$(1) b^3 \cdot b^3 = 2b^3;$$

$$(2) x^4 \cdot x^4 = x^{16};$$

$$(3) (a^5)^2 = a^7;$$

$$(4) (a^3)^2 \cdot a^4 = a^9;$$

$$(5) (ab^2)^3 = ab^6;$$

$$(6) (-2a)^2 = -4a^2.$$

2. 计算:

$$(1) x \cdot x^3 + x^2 \cdot x^2;$$

$$(2) (-pq)^3;$$

$$(3) -(-2a^2b)^4;$$

$$(4) a^3 \cdot a^4 \cdot a + (a^2)^4 + (-2a^4)^2.$$

3. 计算:

(1) $6x^2 \cdot 3xy$;

(2) $2ab^2 \cdot (-3ab)$;

(3) $4x^2y \cdot (-xy^2)^3$;

(4) $(1.3 \times 10^5)(3.8 \times 10^3)$.

4. 计算:

(1) $(4a-b^2) \cdot (-2b)$;

(2) $2x^2(x-\frac{1}{2})$;

(3) $5ab \cdot (2a-b+0.2)$;

(4) $(2a^2-\frac{2}{3}a-\frac{4}{9}) \cdot (-9a)$.

5. 计算:

(1) $(x-6) \cdot (x-3)$;

(2) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})$;

(3) $(3x+2)(x+2)$;

(4) $(4y-1) \cdot (y-5)$;

(5) $(x-2)(x^2+4)$;

(6) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

综合运用

6. 求值:

$x^2(x-1)-x(x^2+x-1)$, 其中 $x=\frac{1}{2}$.

7. 计算:

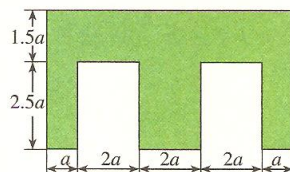
(1) $(x-3)(x-3)-6(x^2+x-1)$;

(2) $(2x+1)^2-(x+3)^2-(x-1)^2+1$.

8. 信息技术的存储设备常用 B, K, M, G 等作为存储量的单位. 例如, 我们常说某计算机的硬盘容量是 40 G, 某移动存储器的容量是 64 M, 某个文件大小是 156 K 等, 其中 $1\text{ G}=2^{10}\text{ M}$, $1\text{ M}=2^{10}\text{ K}$, $1\text{ K}=2^{10}\text{ B}$ (字节). 对于一个 1.44 M 的 3.5 寸软盘, 其容量有多少个字节?

9. 卫星绕地球运动的速度 (即第一宇宙速度) 是 7.9×10^3 米/秒, 求卫星绕地球运行 2×10^2 秒走过的路程.

10. 计算图中阴影所示绿地面积 (长度单位: m).



(第 10 题)



拓展探索

11. 解方程与不等式:

(1) $(x-3)(x-2)+18=(x+9)(x+1)$;

(2) $(3x+4)(3x-4)<9(x-2)(x+3)$.

12. 确定下列各式中 m 的值:

(1) $(x+4)(x+9)=x^2+mx+36$;

(2) $(x-2)(x-18)=x^2+mx+36$;

(3) $(x+3)(x+p)=x^2+mx+36$;

(4) $(x-6)(x-p)=x^2+mx+36$;

(5) $(x+p)(x+q)=x^2+mx+36$, p, q 为正整数.

15.2 乘法公式

15.2 乘法公式

某些特殊形式的多项式相乘，可以写成公式的形式，当遇到相同形式的多项式相乘时，就可以直接运用公式写出结果.

15.2.1 平方差公式



计算下列多项式的积，你能发现什么规律？

(1) $(x+1)(x-1)=$ _____;

(2) $(m+2)(m-2)=$ _____;

(3) $(2x+1)(2x-1)=$ _____.

我们再来计算 $(a+b)(a-b)$ ，有

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

一般地，我们有

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

即两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差.

这个公式叫做（乘法的）平方差公式（formula for the difference of squares）.

思考

你能根据图 15.2-1 中的面积说明平方差公式吗?

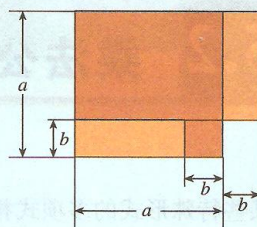


图 15.2-1

例 1 运用平方差公式计算:

- (1) $(3x+2)(3x-2)$;
- (2) $(b+2a)(2a-b)$;
- (3) $(-x+2y)(-x-2y)$.

分析: 在(1)中, 可以把 $3x$ 看成 a , 2 看成 b , 即

$$\begin{array}{ccccccc} (3x+2)(3x-2) & = & (3x)^2 & - & 2^2 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (a+b)(a-b) & = & a^2 & - & b^2 \end{array}$$

解: (1) $(3x+2)(3x-2)$
 $= (3x)^2 - 2^2$
 $= 9x^2 - 4.$

(2) $(b+2a)(2a-b)$
 $= (2a+b)(2a-b)$
 $= (2a)^2 - b^2 = 4a^2 - b^2.$

(3) $(-x+2y)(-x-2y)$
 $= (-x)^2 - (2y)^2$
 $= x^2 - 4y^2.$

你还有其他的
计算方法吗?

例 2 计算:

- (1) 102×98 ;
- (2) $(y+2)(y-2) - (y-1)(y+5).$

解: (1) $102 \times 98 = (100+2)(100-2)$
 $= 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9\,996.$

(2) $(y+2)(y-2) - (y-1)(y+5)$
 $= y^2 - 2^2 - (y^2 + 4y - 5)$
 $= y^2 - 4 - y^2 - 4y + 5$
 $= -4y + 1.$

只有符合公式要求的乘法,才能运用公式简化运算,其余的运算仍按乘法法则进行.

练习

1. 下面各式的计算对不对? 如果不对, 应当怎样改正?

(1) $(x+2)(x-2) = x^2 - 2$; (2) $(-3a-2)(3a-2) = 9a^2 - 4.$

2. 运用平方差公式计算:

(1) $(a+3b)(a-3b)$; (2) $(3+2a)(-3+2a)$;
 (3) 51×49 ; (4) $(3x+4)(3x-4) - (2x+3)(3x-2).$

15.2.2 完全平方公式



计算下列各式, 你能发现什么规律?

(1) $(p+1)^2 = (p+1)(p+1) = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $(m+2)^2 = \underline{\hspace{2cm}};$

(3) $(p-1)^2 = (p-1)(p-1) = \underline{\hspace{2cm}};$

(4) $(m-2)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

我们再来计算 $(a+b)^2$, $(a-b)^2$.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

一般地, 我们有

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

即两数和（或差）的平方，等于它们的平方和，加（或减）它们的积的2倍.

这两个公式叫做（乘法的）完全平方公式（formula for the square of the sum）.



思考

你能根据图 15.2-2 和图 15.2-3 中的面积说明完全平方公式吗？

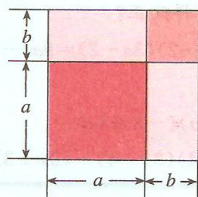


图 15.2-2

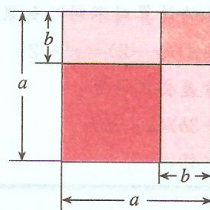


图 15.2-3

例 3 运用完全平方公式计算：

(1) $(4m+n)^2$; (2) $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2$.

解：(1) $(4m+n)^2 = (4m)^2 + 2 \cdot (4m) \cdot n + n^2$
 $= 16m^2 + 8mn + n^2.$

(2) $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 $= y^2 - y + \frac{1}{4}.$

例 4 运用完全平方公式计算：

(1) 102^2 ; (2) 99^2 .

解：(1) $102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2$
 $= 10\,000 + 400 + 4 = 10\,404.$

(2) $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$
 $= 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801.$



$(a+b)^2$ 与 $(-a-b)^2$ 相等吗? $(a-b)^2$ 与 $(b-a)^2$ 相等吗? $(a-b)^2$ 与 a^2-b^2 相等吗? 为什么?

练习

1. 运用完全平方公式计算:

(1) $(x+6)^2$;

(2) $(y-5)^2$;

(3) $(-2x+5)^2$;

(4) $\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y\right)^2$.

2. 下面各式的计算错在哪里? 应当怎样改正?

(1) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$;

(2) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.

运用乘法公式计算,有时要在式子中添括号.在第二章中,我们已学过去括号法则,即

$$a+(b+c)=a+b+c; \quad a-(b+c)=a-b-c.$$

反过来,就得到添括号法则:

$$a+b+c=a+(b+c); \quad a-b-c=a-(b+c).$$

添括号时,如果括号前面是正号,括到括号里的各项都不变符号;如果括号前面是负号,括到括号里的各项都改变符号.

例 5 运用乘法公式计算:

(1) $(x+2y-3)(x-2y+3)$; (2) $(a+b+c)^2$.

解: (1) $(x+2y-3)(x-2y+3)$
 $= [x+(2y-3)][x-(2y-3)]$
 $= x^2 - (2y-3)^2$
 $= x^2 - (4y^2 - 12y + 9)$
 $= x^2 - 4y^2 + 12y - 9.$

(2) $(a+b+c)^2$
 $= [(a+b)+c]^2$
 $= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$

有些整式相乘需要先作适当变形,然后再用公式.

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

练习

1. 在等号右边的括号内填上适当的项:

(1) $a+b-c=a+(\quad)$;

(2) $a-b+c=a-(\quad)$;

(3) $a-b-c=a-(\quad)$;

(4) $a+b+c=a-(\quad)$.

能否用去括号法则检查添括号是否正确?

2. 运用乘法公式计算:

(1) $(a+2b-1)^2$;

(2) $(2x+y+z)(2x-y-z)$.

习题15.2

复习巩固

1. 运用平方差公式计算:

(1) $\left(\frac{2}{3}x-y\right)\left(\frac{2}{3}x+y\right)$;

(2) $(xy+1)(xy-1)$;

(3) $(2a-3b)(3b+2a)$;

(4) $(-2b-5) \cdot (2b-5)$;

(5) $2\,001 \times 1\,999$;

(6) $998 \times 1\,002$.

2. 运用完全平方公式计算:

(1) $(2a+5b)^2$;

(2) $(4x-3y)^2$;

(3) $(-2m-1)^2$;

(4) $\left(1.5a-\frac{2}{3}b\right)^2$;

(5) 63^2 ;

(6) 98^2 .

综合运用

3. 运用乘法公式计算:

阅读与思考 杨辉三角

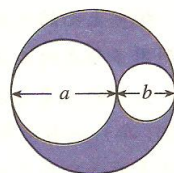
- (1) $(3x-5)^2 - (2x+7)^2$; (2) $(x+y+1)(x+y-1)$;
 (3) $(2x-y-3)^2$; (4) $[(x+2)(x-2)]^2$.

4. 先化简, 再求值:

$$(2x+3y)^2 - (2x+y)(2x-y), \text{ 其中 } x=\frac{1}{3}, y=-\frac{1}{2}.$$

5. 一个正方形的边长增加 3 cm, 它的面积就增加 39 cm², 这个正方形的边长是多少?

6. 如图, 一块直径为 $a+b$ 的圆形钢板, 从中挖去直径分别为 a 与 b 的两个圆, 求剩下的钢板的面积.



(第 6 题)

拓广探索

7. 已知 $a+b=5$, $ab=3$, 求 a^2+b^2 的值. (提示: 利用公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)
 8. 解不等式 $(2x-5)^2 + (3x+1)^2 > 13(x^2-10)$.
 9. 解方程组

$$\begin{cases} (x+2)^2 - (y-3)^2 = (x+y)(x-y), \\ x-3y=2. \end{cases}$$



阅读与思考

选学

杨辉三角

我国著名数学家华罗庚教授, 曾在给青少年撰写的《数学是我国人民所擅长的学科》一文中谈到, 我国古代数学的许多创新与发现都曾居世界前列. 华老说: “实际上我们祖国伟大人民在人类史上, 有过无比睿智的成就”, 其中“杨辉三角”(见下表) 就是一例.

1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			</
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

..... $(a+b)^1$
 $(a+b)^2$
 $(a+b)^3$
 $(a+b)^4$
 $(a+b)^5$
 $(a+b)^6$

这个三角形的构造法则是: 两腰都是 1, 其余每个数为其上方左右两数之和. 它给出

了 $(a+b)^n$ (n 是正整数) 展开式 (按 a 的次数由大到小的顺序排列) 的系数规律. 例如, 在三角形中第三行的三个数 1, 2, 1, 恰好对应着 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展开式中的系数; 第四行的四个数 1, 3, 3, 1, 恰好对应着 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 展开式中的系数; 等等.

根据上面的三角形, 你能写出 $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ 的展开式吗?
请利用多项式的乘法验证你的结果.

上面的三角形在我国宋朝数学家杨辉所著的《详解九章算术》(1261 年) 一书中用过, 杨辉在注释中提到, 贾宪也用过上述方法. 因此我们称这个三角形为“杨辉三角”或“贾宪三角”.

这个三角形被欧洲学者称为“帕斯卡三角”, 这是因为法国数学家帕斯卡于 1654 年发现了此表, 他这一成果比杨辉晚了近 400 年, 比贾宪晚了近 600 年.



15.3 整式的除法

15.3 整式的除法

15.3.1 同底数幂的除法

问题 一种数码照片的文件大小是 2^8 K, 一个存储量为 2^6 M ($1\text{M}=2^{10}\text{K}$) 的移动存储器能存储多少张这样的数码照片?

这个移动存储器的容量为 $2^6 \times 2^{10} = 2^{16}$ K, 它能存储这种数码照片的数量为 $2^{16} \div 2^8$. 怎样计算 $2^{16} \div 2^8$ 呢?

根据除法是乘法的逆运算, 求 $2^{16} \div 2^8$ 的商, 就是要求一个数, 使它与 2^8 的积等于 2^{16} .

$$\because 2^8 \times 2^8 = 2^{16},$$

$$\therefore 2^{16} \div 2^8 = 2^8 = 256.$$

所以, 这个移动存储器能存储 256 张照片.

$$\begin{aligned} & \text{由 } 2^{16} \div 2^8 \\ &= \frac{\overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{16 \text{ 个 } 2}}{\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{8 \text{ 个 } 2}} \\ &= \overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{8 \text{ 个 } 2}, \\ & \text{也可得} \\ & 2^{16} \div 2^8 = 2^8. \end{aligned}$$

根据除法的意义填空, 看看计算结果有什么规律:

$$(1) 5^5 \div 5^3 = 5^{(\quad)};$$

$$(2) 10^7 \div 10^5 = 10^{(\quad)};$$

$$(3) a^6 \div a^3 = a^{(\quad)}.$$

一般地, 我们有

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m, n \text{ 都是正整数, 并且 } m > n).$$

为什么这里规定 $a \neq 0$?

即同底数幂相除, 底数不变, 指数相减.

例1 计算:

(1) $x^8 \div x^2$; (2) $a^4 \div a$; (3) $(ab)^5 \div (ab)^2$.

解: (1) $x^8 \div x^2 = x^{8-2} = x^6$.

(2) $a^4 \div a = a^{4-1} = a^3$.

(3) $(ab)^5 \div (ab)^2 = (ab)^{5-2} = (ab)^3 = a^3b^3$.



分别根据除法的意义填空, 你能得出什么结论?

(1) $3^2 \div 3^2 = (\quad)$;

(2) $10^3 \div 10^3 = (\quad)$;

(3) $a^m \div a^m = (\quad)$ ($a \neq 0$).

根据除法的意义, 可知

$$a^m \div a^m = 1.$$

如果依照同底数幂的除法 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($m > n$) 来处理 $a^m \div a^n$, 又可得

$$a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0.$$

于是规定:

$$a^0 = 1 (a \neq 0).$$

即任何不等于0的数的0次幂都等于1.

练习

1. 填空:

(1) $a^5 \cdot (\quad) = a^7$;

(2) $m^3 \cdot (\quad) = m^8$;

(3) $x^3 \cdot x^5 \cdot (\quad) = x^{12}$;

(4) $(-6)^3 (\quad) = (-6)^5$.

2. 计算:

(1) $x^7 \div x^5$;

(2) $m^8 \div m^8$;

(3) $(-a)^{10} \div (-a)^7$;

(4) $(xy)^5 \div (xy)^3$.

3. 下面的计算对不对? 如果不对, 应当怎样改正?

(1) $x^6 \div x^2 = x^3$;

(2) $6^4 \div 6^4 = 6$;

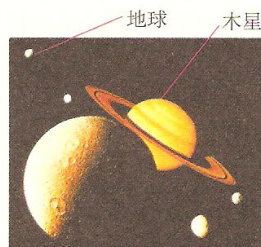
(3) $a^3 \div a = a^3$;

(4) $(-c)^4 \div (-c)^2 = -c^2$.

15.3.2 整式的除法

问题 木星的质量约是 1.90×10^{24} 吨, 地球的质量约是 5.98×10^{21} 吨, 你知道木星的质量约为地球质量的多少倍吗?

要解决这个问题, 就要计算 $(1.90 \times 10^{24}) \div (5.98 \times 10^{21})$.



(1) 计算 $(1.90 \times 10^{24}) \div (5.98 \times 10^{21})$, 说说你计算的根据是什么?

(2) 你能利用(1)中的方法计算下列各式吗?

$$8a^3 \div 2a; 6x^3y \div 3xy; 12a^3b^2x^3 \div 3ab^2.$$

(3) 你能根据(2)说说单项式除以单项式的运算法则吗?

$8a^3 \div 2a$ 是
 $(8a^3) \div (2a)$ 的
意思.

计算 $12a^3b^2x^3 \div 3ab^2$, 就是要求一个单项式, 使它与 $3ab^2$ 的乘积等于 $12a^3b^2x^3$.

$$\because 4a^2x^3 \cdot 3ab^2 = 12a^3b^2x^3,$$

$$\therefore 12a^3b^2x^3 \div 3ab^2 = 4a^2x^3.$$

上面的商式 $4a^2x^3$ 的系数 $4 = 12 \div 3$, a 的指数 $2 = 3 - 1$, b 的指数 $0 = 2 - 2$, 而 $b^0 = 1$, x 的指数 $3 = 3 - 0$.

单项式相除, 把系数与同底数幂分别相除作为商的因式, 对于只在被除式里含有的字母, 则连同它的指数作为商的一个因式.

例2 计算:

$$(1) 28x^4y^2 \div 7x^3y; \quad (2) -5a^5b^3c \div 15a^4b.$$

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad & 28x^4y^2 \div 7x^3y \\ &= (28 \div 7) \cdot x^{4-3} \cdot y^{2-1} \end{aligned}$$

$$=4xy.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & -5a^5b^3c \div 15a^4b \\ & = [(-5) \div 15] a^{5-4} b^{3-1} c \\ & = -\frac{1}{3} ab^2c. \end{aligned}$$

练习

1. 计算:

$$\begin{aligned} (1) & 10ab^3 \div (-5ab); & (2) & -8a^2b^3 \div 6ab^2; \\ (3) & -21x^2y^4 \div (-3x^2y^3); & (4) & (6 \times 10^8) \div (3 \times 10^5). \end{aligned}$$

2. 把图中左边括号里的每一个式子分别除以 $2x^2y$, 然后把商式写在右边括号里.

$$\left(\begin{array}{l} 4x^3y \\ -12x^4y^3 \\ -16x^2yz \\ \frac{1}{2}x^2y \end{array} \right) \xrightarrow{\div 2x^2y} \left(\begin{array}{l} 2x \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

(第2题)



探究

计算下列各式, 说说你是怎样计算的.

$$\begin{aligned} (1) & (am+bm) \div m; \\ (2) & (a^2+ab) \div a; \\ (3) & (4x^2y+2xy^2) \div 2xy. \end{aligned}$$

计算 $(am+bm) \div m$, 就是要求一个多项式, 使它与 m 的积是 $am+bm$.

$$\begin{aligned} \because & (a+b)m = am+bm, \\ \therefore & (am+bm) \div m = a+b, \\ \text{又} & am \div m + bm \div m = a+b, \\ \therefore & (am+bm) \div m = am \div m + bm \div m. \end{aligned}$$

把多项式除以单项式问题转化为单项式除以单项式问题来解决.

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.

例3 计算：

(1) $(12a^3 - 6a^2 + 3a) \div 3a$;

(2) $(21x^4y^3 - 35x^3y^2 + 7x^2y^2) \div (-7x^2y)$;

(3) $[(x+y)^2 - y(2x+y) - 8x] \div 2x$.

解：(1) $(12a^3 - 6a^2 + 3a) \div 3a$
 $= 12a^3 \div 3a - 6a^2 \div 3a + 3a \div 3a$
 $= 4a^2 - 2a + 1.$

(2) $(21x^4y^3 - 35x^3y^2 + 7x^2y^2) \div (-7x^2y)$
 $= -3x^2y^2 + 5xy - y.$

(3) $[(x+y)^2 - y(2x+y) - 8x] \div 2x$
 $= (x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - y^2 - 8x) \div 2x$
 $= (x^2 - 8x) \div 2x$
 $= \frac{1}{2}x - 4.$

练习

计算：

(1) $(6xy + 5x) \div x$;

(2) $(15x^2y - 10xy^2) \div 5xy$;

(3) $(8a^2 - 4ab) \div (-4a)$;

(4) $(25x^3 + 15x^2 - 20x) \div (-5x)$.

习题15.3

复习巩固

1. 计算:

$$(1) (ax)^5 \div (ax)^3;$$

$$(2) (x^2)^5 \div (x^2)^2;$$

$$(3) (a^3)^2 \div (a^2)^3;$$

$$(4) (ab^2)^3 \div (-ab)^2.$$

2. 计算:

$$(1) 24x^2y \div (-6xy);$$

$$(2) (-5r^2)^2 \div 5r^4;$$

$$(3) 7m(4m^2p)^2 \div 7m^2;$$

$$(4) (-12s^4t^6) \div \left(\frac{1}{2}s^2t^3\right)^2.$$

3. 计算:

$$(1) (6x^4 - 8x^3) \div (-2x^2);$$

$$(2) (8a^3b - 5a^2b^2) \div 4ab;$$

$$(3) \left(\frac{2}{5}y^3 - 7y^2 + \frac{2}{3}y\right) \div \frac{2}{3}y;$$

$$(4) \left(0.25a^2b - \frac{1}{2}a^3b^2 - \frac{1}{6}a^4b^3\right) \div (-0.5a^2b).$$

综合运用

4. 一颗人造地球卫星的速度是 2.88×10^7 米/时, 一架喷气飞机的速度是 1.8×10^6 米/时, 这颗人造地球卫星的速度是这架喷气式飞机的速度的多少倍?

5. 已知 1 米 = 10^9 纳米, 某种病毒的直径为 100 纳米, 多少个这种病毒能排成 1 毫米长?

6. 如图, 在半径 R 为 0.5 米的地球仪的表面之外, 距赤道 1 米拉一条绳子绕地球仪一周, 这条绳长比地球仪的赤道的周长多几米? 如果在地球赤道表面也同样做, 情况又怎样 (已知地球半径为 6 370 千米, π 取 3.14)?



(第 6 题)

拓广探索

7. 已知 $2^m = a$, $32^n = b$, 求 2^{3m+10n} .

8. 已知 $2x - y = 10$, 求 $[(x^2 + y^2) - (x - y)^2 + 2y(x - y)] \div 4y$ 的值.

15.4 因式分解

15.4 因式分解



630 能被哪些数整除？说说你是怎样想的。

在小学我们知道，要想解决这个问题，需要把 630 分解成质数的乘积的形式，即

$$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

类似地，在式的变形中，有时需要将一个多项式写成几个整式的乘积的形式。



请把下列多项式写成整式的乘积的形式：

(1) $x^2 + x =$ _____；

(2) $x^2 - 1 =$ _____.

$$\begin{aligned} x(x+1) &= x^2 + x, \\ (x+1)(x-1) &= x^2 - 1. \end{aligned}$$

我们根据整式的乘法，可以联想得到

$$\begin{aligned} x^2 + x &= x(x+1), \\ x^2 - 1 &= (x+1)(x-1). \end{aligned}$$

上面我们把一个多项式化成了几个整式的积的形式，像这样的式子变形叫做把这个多项式**因式分解** (factoring)，也叫做把这个多项式**分解因式**。

可以看出，因式分解与整式乘法是相反方向的变形，即

$$x^2-1 \xrightleftharpoons[\text{整式乘法}]{\text{因式分解}} (x+1)(x-1).$$

下面我们探讨因式分解的两种基本方法.

15.4.1 提公因式法

我们看多项式

$$ma+mb+mc,$$

它的各项都有一个公共的因式 m , 我们把因式 m 叫做这个多项式各项的**公因式** (common factor).

由 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$, 可得

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

这样就把 $ma+mb+mc$ 分解成两个因式乘积的形式, 其中一个因式是各项的公因式 m , 另一个因式 $(a+b+c)$ 是 $ma+mb+mc$ 除以 m 所得的商. 像这种分解因式的方法叫做**提公因式法**.

下面我们看几个利用提公因式法分解因式的例子.

例1 把 $8a^3b^2+12ab^3c$ 分解因式.

分析: 先找出 $8a^3b^2$ 与 $12ab^3c$ 的公因式, 再提出公因式. 我们看这两项的系数 8 与 12, 它们的最大公约数是 4; 两项的字母部分 a^3b^2 与 ab^3c 都含有字母 a 和 b , 其中 a 的最低次数是 1, b 的最低次数是 2, 我们选定 $4ab^2$ 为要提出的公因式. 提出公因式 $4ab^2$ 后, 另一个因式 $2a^2+3bc$ 就不再有公因式了.

$$\begin{aligned}\text{解: } & 8a^3b^2+12ab^3c \\ &= 4ab^2 \cdot 2a^2 + 4ab^2 \cdot 3bc \\ &= 4ab^2(2a^2+3bc).\end{aligned}$$

如果提出公因式 $4ab$, 另一个因式是否还有公因式?

例2 把 $2a(b+c)-3(b+c)$ 分解因式.

分析: $(b+c)$ 是这两个式子的公因式, 可以直接提出.

解: $2a(b+c)-3(b+c)$
 $= (b+c)(2a-3).$

如何检查因式分解是否正确?

练习

1. 把下列各式分解因式:

(1) $8m^2n+2mn$;

(2) $12xyz-9x^2y^2$;

(3) $2a(y-z)-3b(z-y)$;

(4) $p(a^2+b^2)-q(a^2+b^2).$

2. 先分解因式, 再求值:

$4a^2(x+7)-3(x+7)$, 其中 $a=-5$, $x=3$.

3. 计算 $5 \times 3^4 + 24 \times 3^3 + 63 \times 3^2$.

15.4.2 公式法



思考

你能将多项式 x^2-4 与多项式 y^2-25 分解因式吗? 这两个多项式有什么共同的特点?

这两个多项式都可以写成两个数的平方差的形式, 对于这种形式的多项式, 可以利用平方差公式来分解因式.

把整式乘法的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 反过来, 就得到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

即两个数的平方差, 等于这两个数的和与这两个数的差的积.

例3 分解因式:

(1) $4x^2-9$; (2) $(x+p)^2-(x+q)^2$.

分析: 在(1)中, $4x^2=(2x)^2$, $9=3^2$, $4x^2-9=(2x)^2-3^2$, 即可用平方差公式分解因式.

$$\begin{aligned}\text{解: (1)} \quad & 4x^2 - 9 \\ &= (2x)^2 - 3^2 \\ &= (2x+3)(2x-3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2)} \quad & (x+p)^2 - (x+q)^2 \\ &= [(x+p)+(x+q)][(x+p)-(x+q)] \\ &= (2x+p+q)(p-q).\end{aligned}$$

把 $(x+p)$ 和 $(x+q)$ 各看成一个整体, 设 $x+p=m$, $x+q=n$, 则原式化为 m^2-n^2 .

例4 分解因式:

$$\text{(1)} \quad x^4 - y^4; \quad \text{(2)} \quad a^3b - ab.$$

分析: (1) $x^4 - y^4$ 可以写成 $(x^2)^2 - (y^2)^2$ 的形式, 这样就可以利用平方差公式进行因式分解了.

(2) $a^3b - ab$ 有公因式 ab , 应先提出公因式, 再进一步分解.

$$\begin{aligned}\text{解: (1)} \quad & x^4 - y^4 \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x+y)(x-y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(2)} \quad & a^3b - ab \\ &= ab(a^2 - 1) \\ &= ab(a+1)(a-1).\end{aligned}$$

分解因式, 必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

练习

1. 下列多项式能否用平方差公式来分解因式? 为什么?

- (1) $x^2 + y^2$; (2) $x^2 - y^2$;
(3) $-x^2 + y^2$; (4) $-x^2 - y^2$.

2. 分解因式:

- (1) $a^2 - \frac{1}{25}b^2$; (2) $9a^2 - 4b^2$;
(3) $x^2y - 4y$; (4) $-a^4 + 16$.



你能将多项式 $a^2+2ab+b^2$ 与 $a^2-2ab+b^2$ 分解因式吗？这两个多项式有什么特点？

这两个多项式是两个数的平方和加上或减去这两个数的积的 2 倍，这恰是两数和或差的平方，我们把 $a^2+2ab+b^2$ 和 $a^2-2ab+b^2$ 这样的式子叫做**完全平方式**，利用完全平方公式可以把形如完全平方式的多项式因式分解。

把整式乘法的完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

反过来，就得到

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,$$

即两个数的平方和加上（或减去）这两个数的积的 2 倍，等于这两个数的和（或差）的平方。

例 5 分解因式：

$$(1) 16x^2+24x+9; \quad (2) -x^2+4xy-4y^2.$$

分析：在 (1) 中， $16x^2=(4x)^2$ ， $9=3^2$ ， $24x=2 \cdot 4x \cdot 3$ ，所以 $16x^2+24x+9$ 是一个完全平方式，即

$$16x^2+24x+9=(4x)^2+2 \cdot 4x \cdot 3+3^2.$$

$$\begin{array}{ccccc} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ a^2 & + & 2 \cdot a & \cdot b & + b^2. \end{array}$$

$$\text{解：}(1) 16x^2+24x+9=(4x)^2+2 \cdot 4x \cdot 3+3^2$$

$$=(4x+3)^2.$$

$$(2) -x^2+4xy-4y^2=-(x^2-4xy+4y^2)$$

$$=-[x^2-2 \cdot x \cdot 2y+(2y)^2]$$

$$=-(x-2y)^2.$$

例6 分解因式:

(1) $3ax^2+6axy+3ay^2$;

(2) $(a+b)^2-12(a+b)+36$.

分析: 在(1)中有公因式 $3a$, 应先提出公因式, 再进一步分解.

解: (1) $3ax^2+6axy+3ay^2$
 $=3a(x^2+2xy+y^2)$
 $=3a(x+y)^2$.

(2) $(a+b)^2-12(a+b)+36$
 $=(a+b)^2-2 \cdot (a+b) \cdot 6+6^2$
 $=(a+b-6)^2$.

将 $a+b$ 看作一个整体, 设 $a+b=m$, 则原式化为完全平方式 $m^2-12m+36$.

练习

1. 下列多项式是不是完全平方式? 为什么?

(1) a^2-4a+4 ;

(2) $1+4a^2$;

(3) $4b^2+4b-1$;

(4) a^2+ab+b^2 .

2. 分解因式:

(1) $x^2+12x+36$;

(2) $-2xy-x^2-y^2$;

(3) a^2+2a+1 ;

(4) $4x^2-4x+1$;

(5) $ax^2+2a^2x+a^3$;

(6) $-3x^2+6xy-3y^2$.

习题15.4

复习巩固

分解因式 (第1~3题):

1. (1) $15a^3+10a^2$;

(2) $12abc-3bc^2$;

(3) $6p(p+q)-4q(p+q)$;

(4) $m(a-3)+2(3-a)$.

2. (1) $1-36b^2$; (2) $12x^2-3y^2$;
 (3) $0.49p^2-144$; (4) $(2x+y)^2-(x+2y)^2$.
 3. (1) $1+10t+25t^2$; (2) $m^2-14m+49$;
 (3) $y^2+y+\frac{1}{4}$; (4) $(m+n)^2-4m(m+n)+4m^2$;
 (5) $25a^2-80a+64$; (6) $a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$.

综合运用

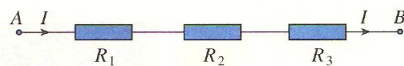
4. 利用因式分解计算:

- (1) $21 \times 3.14 + 62 \times 3.14 + 17 \times 3.14$;
 (2) $758^2 - 258^2$.

5. 分解因式:

- (1) $(a-b)^2 + 4ab$; (2) $(p-4)(p+1) + 3p$;
 (3) $4xy^2 - 4x^2y - y^3$; (4) $3ax^2 - 3ay^2$.

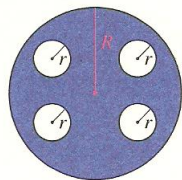
6. 如图, 把 R_1, R_2, R_3 三个电阻串联起来, 线路 AB 上的电流为 I , 电压为 V , 则 $V = IR_1 + IR_2 + IR_3$. 当 $R_1 =$



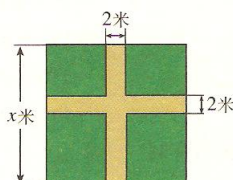
(第6题)

19.7, $R_2 = 32.4$, $R_3 = 35.9$, $I = 2.5$ 时, 求 V 的值.

7. 如图, 在半径为 R 的圆形钢板上, 冲去半径为 r 的四个小圆, 计算当 $R = 7.8$ cm, $r = 1.1$ cm 时剩余部分的面积 (π 取 3.14).



(第7题)



(第8题)

8. 如图, 某小区规划在边长为 x m 的正方形场地上, 修建两条宽为 2 m 的甬道, 其余部分种草, 你能用几种方法计算甬道所占的面积?

拓展探索

9. 已知 $4y^2 + my + 9$ 是完全平方式, 求 m 的值.
 10. 观察下列式子:

观察与猜想 $x^2+(p+q)x+pq$ 型式子的因式分解

$$2 \times 4 + 1 = 9 = 3^2; \quad 6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2; \quad 14 \times 16 + 1 = 225 = 15^2.$$

你得出了什么结论？你能证明这个结论吗？

11. 在实数范围内分解因式：

(1) x^2-2 ; (2) $5x^2-3$.

(提示：根据平方根的意义把各式写成平方差的形式)

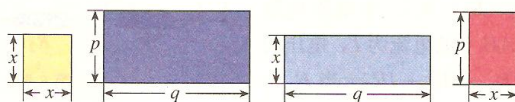


观察与猜想

选学

$x^2+(p+q)x+pq$ 型式子的因式分解

将下图中的 1 个正方形和 3 个长方形拼成一个大长方形，请观察这四个图形的面积与拼成的大长方形的面积有什么关系，你能据此将 $x^2+(p+q)x+pq$ 分解因式吗？



事实上，

$$\begin{aligned} & x^2+(p+q)x+pq \\ &= x^2+px+qx+pq \\ &= (x^2+px)+(qx+pq) \text{ (加法结合律)} \\ &= x(x+p)+q(x+p) \\ &= (x+p)(x+q). \end{aligned}$$

这样，我们得到

$$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q). \quad \textcircled{1}$$

利用①式可以将某些二次项系数是 1 的二次三项式分解因式.

例 把 x^2+3x+2 分解因式.

分析： x^2+3x+2 中的二次项系数是 1，常数项 $2=1 \times 2$ ，一次项系数 $3=1+2$ ，这是一个 $x^2+(p+q)x+pq$ 型式子.

解： x^2+3x+2
 $= (x+1)(x+2).$

请利用①式将下列多项式分解因式：

- (1) $x^2+7x+10$; (2) x^2-2x-8 ;
(3) $y^2-7y+12$; (4) $x^2+7x-18$.

数学活动



数学活动

活动 1

我们过去学习中已经发现了如下的运算规律：

$$15 \times 15 = 1 \times 2 \times 100 + 25 = 225,$$

$$25 \times 25 = 2 \times 3 \times 100 + 25 = 625,$$

$$35 \times 35 = 3 \times 4 \times 100 + 25 = 1\,225$$

.....

你能得到一般的规律吗？你能用本章所学知识证明你的结论吗？

活动 2

(1) 计算下列两个数的积，这两个数的十位上的数字相同，个位上的数字之和等于 10. 你发现结果有什么规律？

$$53 \times 57, 38 \times 32, 84 \times 86, 71 \times 79.$$

(2) 你能用本章所学知识解释这个规律吗？

(提示：个位上的数字为 b ，十位上的数字为 a 的两位数可以表示成 $10a+b$)

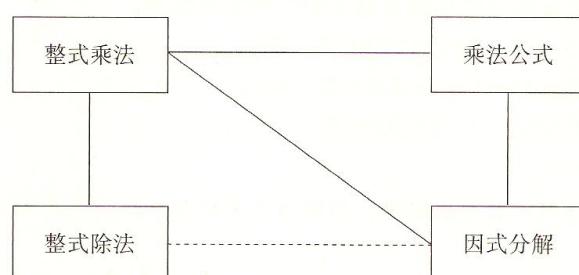
(3) 利用你发现的规律计算：

$$58 \times 52, 63 \times 67, 75^2, 95^2.$$

小 结

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 幂的运算性质是整式乘除的基础，单项式的乘除是整式乘除的关键。举例说明怎样将多项式乘（除以）单项式、多项式乘多项式转化为单项式的乘除。
2. 把一些特殊形式的多项式乘法写成公式的形式，可以简化运算。本章学习了哪几个乘法公式？你能从图形的角度解释乘法公式的合理性吗？
3. 举例说明因式分解与整式乘法之间的关系。你学习了哪几种分解因式的方法？请举例说明。

复习题 15

复习题15

复习巩固

1. 计算:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------|
| (1) $(-2x^2y^3)^2 \cdot (xy)^3$; | (2) $(2a+3b)(2a-b)$; |
| (3) $5x^2(x+1)(x-1)$; | (4) $(2x+y-1)^2$; |
| (5) 59.8×60.2 ; | (6) 198^2 . |

2. 计算:

- | | |
|---|--|
| (1) $(2a)^3 \cdot b^4 \div 12a^3b^2$; | (2) $\left(-\frac{2}{3}a^7b^5\right) \div \frac{3}{2}a^2b^5$; |
| (3) $\left(\frac{6}{5}a^3x^4 - 0.9ax^3\right) \div \frac{3}{5}ax^3$; | (4) $(7x^2y^3 - 8x^3y^2z) \div 8x^2y^2$; |
| (5) $12^{13} \div (3^{10} \cdot 4^{11})$; | (6) $(5^4 \times 3^3 - 5^3 \times 3^2 + 5^2 \times 3) \div 15$. |

3. 分解因式:

- | | |
|--------------------------|---------------------------------|
| (1) $25x^2 - 16y^2$; | (2) $(a-b)(x-y) - (b-a)(x+y)$; |
| (3) $a^2 - 4ab + 4b^2$; | (4) $4 + 12(x-y) + 9(x-y)^2$. |

综合运用

4. 计算:

- | | |
|---|--|
| (1) $4(x+1)^2 - (2x+5)(2x-5)$; | (2) $2x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) - 3x\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)$; |
| (3) $3(y-z)^2 - (2y+z)(-z+2y)$; | |
| (4) $[x(x^2y^2 - xy) - y(x^2 - x^3y)] \div 3x^2y$. | |

5. 分解因式:

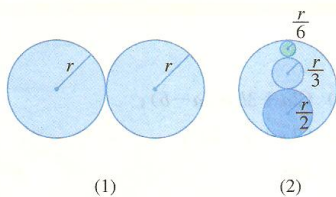
- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| (1) $x^3 - 9x$; | (2) $16x^4 - 1$; |
| (3) $6xy^2 - 9x^2y - y^3$; | (4) $(2a-b)^2 + 8ab$. |

6. 已知 $(x+y)^2 = 25$, $(x-y)^2 = 9$, 求 xy 与 $x^2 + y^2$ 的值.

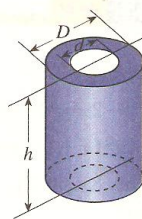
7. 我国陆地面积约是 9.6×10^6 平方千米. 平均每平方千米的土地上, 一年从太阳得到的能量相当于燃烧 1.3×10^5 吨煤所产生的能量. 求在我国领土上, 一年内从太阳得到的能量约相当于燃烧多少吨煤所产生的能量.

8. 某公园计划砌一个形状如图(1)的喷水池, 后来有人建议改为图(2)的形状, 且外圆的直径不变, 请你比较两种方案, 确定哪一种方案砌各圆形水池的周边需用的材料多.

(提示: 比较两种方案中各圆形水池周长的和)



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 如图, 水压机有四根空心钢立柱, 每根高都是 18 米, 外径 D 为 1 米, 内径 d 为 0.4 米. 每立方米钢的质量为 7.8 吨, 求 4 根立柱的总质量 (π 取 3.14).

拓广探索

10. 解方程

$$(x+7)(x+5)-(x+1)(x+5)=42.$$

11. 解不等式组

$$\begin{cases} x(2x-5) > 2x^2 - 3x - 4, \\ (x+1)(x+3) + 8x > (x+5)(x-5) - 2. \end{cases}$$

12. 求证: 当 n 是整数时, 两个连续奇数的平方差 $(2n+1)^2 - (2n-1)^2$ 是 8 的倍数.

13. 某种产品的原料提价, 因而厂家决定对产品进行提价, 现有三种方案:

方案 1: 第一次提价 $p\%$, 第二次提价 $q\%$.

方案 2: 第一次提价 $q\%$, 第二次提价 $p\%$.

方案 3: 第一、二次提价均为 $\frac{p+q}{2}\%$.

其中 p, q 是不相等的正数. 三种方案哪种提价最多?

(提示: 因为 $p \neq q$, $(p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2 > 0$, 所以 $p^2 + q^2 > 2pq$)

部分中英文词汇索引

部分中英文词汇索引

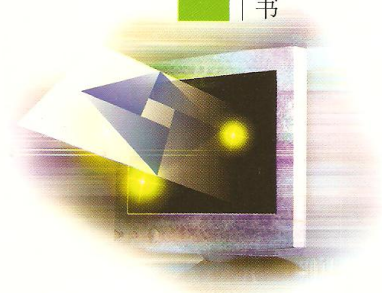
中文	英文	页码
全等形	congruent figures	2
全等三角形	congruent triangles	2
轴对称图形	symmetric figure	29
对称轴	axis of symmetry	29
对称点	symmetric points	30
垂直平分线	perpendicular bisector	32
等腰三角形	isosceles triangle	49
等边三角形	equilateral triangle	53
算术平方根	arithmetic square root	68
被开方数	radicand	68
平方根、二次方根	square root	73
开平方	extraction of square root	73
立方根、三次方根	cube root	77
开立方	extraction of cube root	77
根指数	radical exponent	78
无理数	irrational number	82
实数	real number	82
变量	variable	95
常量	constant	95
自变量	independent variable	97
函数	function	97
图象	graph	100
正比例函数	proportional function	111
一次函数	linear function	114
平方差公式	formula for the difference of squares	151
完全平方公式	formula for the square of the sum	154
因式分解	factoring	165
公因式	common factor	166

封 底



义务教育课程标准实验教科书

数
学



义务教育课程标准实验教科书 数 学(彩色) 八年级上册
ISBN 978-7-107-18245-7/G · 11334(课) 压膜本 定价:10.90 元
批准文号:鄂价工农[2009]104 号 举报电话:12358

ISBN 978-7-107-18245-7



定价:10.90 元